59

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica
10 luglio 2001

Jes → 22/06/12

1) Il sistema descritto dall'hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{L}}^2}{2\,\mathcal{I}} + \alpha \hat{L}_z$$

si trova all'istante $t = 0$ nello stato

$$|\Psi_0 >= |1,1> +2i\;|1,0> .$$

Calcolare il valor medio della proiezione del momento angolare lungo l'asse x, $< \hat{L}_x >$, per $t > 0$.
In queste espressioni $\hat{\mathbf{L}} \equiv (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$ è l'operatore momento angolare, $\mathcal{I}$ ed α sono parametri reali e $|\ell, m>$ sono gli autostati comuni a $\hat{\mathbf{L}}^2$ e $\hat{L}_z$.

$\boxed{\text{VAR}}$

2) Una particella si trova nel potenziale

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & \text{per } x < 0; \\ kx, & \text{per } x > 0. \end{cases}$$

Determinare la stima variazionale dell'energia dello stato fondamentale utilizzando come funzione di prova

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0; \\ xe^{-\lambda x}, & \text{per } x > 0. \end{cases}$$

e commentare il risultato. k e λ sono parametri reali e *positivi*.

riassegnato con variante 9/06/2013

3) Un sistema di momento angolare $j = 1$ ha hamiltoniana

$$\hat{H} = \alpha \left(\hat{J}_z + \frac{1}{\hbar} \hat{J}_z^2 \right), \qquad \text{con } \alpha > 0.$$

Determinare, al primo ordine perturbativo, la correzione all'energia dello stato fondamentale dovuta alla perturbazione

$$\hat{V} = \beta \left(\hat{J}_+ + \hat{J}_- \right),$$

dove β è un parametro reale.

4) Un gran numero di muoni (μ) viene prodotto nell'alta atmosfera e viaggia, in verticale, verso terra con velocità $v = 0.99\;c$. A causa del decadimento (p.es. $\mu^- \to e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$) *nel proprio sistema di riferimento* il numero di muoni che sopravvivono dopo il tempo t è $N(t) = N(0)\;e^{-t/\tau}$, dove $\tau \approx 10^{-6}\;s$ è la vita media. Supponendo che l' 1 % dei muoni

60

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica
3 settembre 2001

22/06/'12 1) Una particella si trova immersa in un potenziale unidimensionale della forma $V(q) = V_0 \, \exp(-\alpha q)$, dove α è una costante positiva. Scrivere le equazioni del moto per gli operatori di posizione ed impulso nello schema di Heisenberg e stabilire sotto quali condizioni i rispettivi valori medi soddisfano le equazioni classiche del moto. Assumere che la funzione d'onda della particella, a qualsiasi istante, abbia la forma

$$\Psi(q) = N \, e^{-\frac{(q-<q>)^2}{\sigma^2}},$$

dove N è una costante di normalizzazione, $< q >$ è il valor medio della posizione e σ lo scarto quadratico medio.

2) Un rotatore rigido isotropo di carica q si trova nello stato fondamentale $|00>$. Imponendo un campo elettrico uniforme e costante nel tempo, $\mathbf{E}$, diretto lungo $\mathbf{z}$, calcolare al primo ordine perturbativo la variazione di energia e il nuovo stato del sistema.

yes → 3) La funzione d'onda di un elettrone in un atomo idrogenoide è

$$\Psi(r) = N e^{-\frac{r}{a}},$$

dove N è una costante di normalizzazione ed $a = a_0/Z$, con $a_0 \approx 0.5$ Å raggio di Bohr e Z carica nucleare. Valutare la probabilità che l'elettrone si trovi *all'interno* di un tale nucleo con numero di massa $A = 173$, $Z = 70$ e raggio $R_N = 1.2 \, A^{1/3}$ fm.

4) In un urto centrale, un elettrone di energia cinetica T_e rimbalza elasticamente su un protone in quiete. Calcolare l'energia cinetica minima dell'elettrone affinché dopo l'urto il protone abbia energia cinetica uguale a $\frac{1}{2}T_e$. (Si trascuri la massa dell'elettrone rispetto alla sua energia cinetica).

Si raccomanda di svolgere ciascun quesito su un foglio separato.

62

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica
11 Dicembre 2001

1. Due particelle *distinguibili* si trovano nello stato fondamentale di una buca di potenziale a pareti infinite di larghezza L. Determinare la probabilità di trovare ambedue le particelle nella stessa posizione.

2. Una particella si trova all'istante iniziale $t = 0$ nello stato di momento angolare $|00\rangle$. Per $t > 0$ agisce un campo elettrico *lungo la direzione z*, $E_z = \mathcal{E} \cos \omega t$. Determinare la probabilità *esatta* che all'istante t la particella si trovi nello stato $|10\rangle$. Assumere che i quattro stati $|00\rangle$, $|1m\rangle$ (con $m = 0, \pm 1$) formino un sistema completo.

3. Una particella di massa m è confinata in una buca di potenziale unidimensionale di larghezza $2a$ a pareti infinite ($a > 0$):

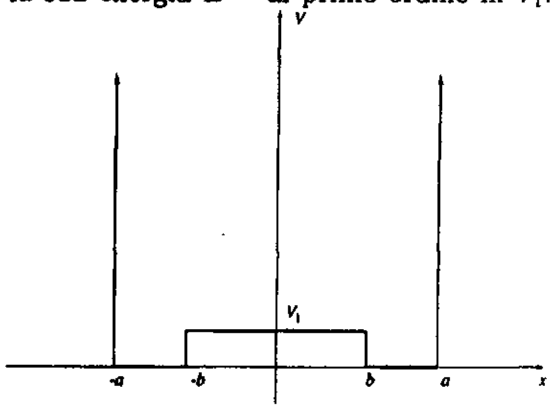
$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } |x| < a, \\ \infty, & \text{in caso contrario.} \end{cases} \qquad (1)$$

Si consideri inoltre la perturbazione indotta dal potenziale aggiuntivo:

$$V_1(x) = \begin{cases} V_1, & \text{se } |x| < b, \\ 0, & \text{in caso contrario,} \end{cases} \qquad (2)$$

con $b \leq a$ e $V_1 \geq 0$.

Determinare lo stato fondamentale $|\psi^{(1)}\rangle$ e la sua energia $E^{(1)}$ al primo ordine in V_1.



4. Discutere la possibilità della disintegrazione

$$\gamma \longrightarrow e^- + e^+,$$

in cui un fotone di alta energia $E_\gamma > 2m_ec^2$ si trasforma in una coppia elettrone-positrone nel vuoto.

Si raccomanda di svolgere ciascun quesito su un foglio separato.

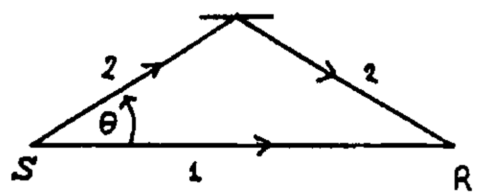
Compito di Istituzioni di Fisica Teorica
28-1-2002

1 Qual è la probabilità di trovare un oscillatore armonico quantistico unidimensionale di massa m e frequenza ω nelle regioni classicamente proibite ? Considerare solo il caso in cui l'oscillatore armonico si trova nello stato fondamentale.

2 Una particella di massa m e carica q è vincolata a muoversi su un'orbita circolare di raggio R. Considerando il problema quantistico unidimensionale del moto lungo la coordinata s dell'orbita, calcolare autofunzioni e autoenergie della particella e quindi il momento di dipolo magnetico della spira μ (μ = area dell'orbita · corrente).

3 Una particella si trova nello stato fondamentale di un oscillatore armonico unidimensionale. La particella sia sottoposta ad una piccola perturbazione della forma $V(x) = \alpha x$. Determinare al primo ordine nella perturbazione come cambia per effetto di V lo scarto quadratico medio delle posizione della particella.

4 Una sorgente emette due onde monocromatiche piane di frequenza angolare ω che , dopo aver effettuato il percorso indicato in figura, vengono a sovrapporsi nel rivelatore R. Sia L la distanza tra sorgente e rivelatore. Determinare l'angolo minimo θ perchè le due onde arrivino in S in accordo di fase. In queste condizioni come descrive il fenomeno di interferenza un osservatore inerziale che si muove a velocità v riscpetto al dispositivo S-R ?



65

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica
Anno Accademico 2000-2001. Sessione Invernale (Straordinaria)
3-4-2002

1. Una particella si trova in uno stato rappresentato dalla seguente funzione d'onda:

$$\Psi(x, y, z) = f(r)(r + x + y + z)$$

dove $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Determinare quali sono i possibili risultati di una misura della proiezione del momento angolare lungo una qualunque delle tre direzioni spaziali, e quali sono le probabilità di ottenerli.

2. Calcolare la dispersione dell'energia potenziale per un atomo di idrogeno nello stato fondamentale. Come la dispersione dell'energia potenziale è legata alla dispersione dell'energia cinetica?

3. Una particella carica in moto unidimensionale in una buca infinita di larghezza L viene sottoposta ad un campo elettrico E costante ed uniforme per un tempo T. Assumendo che prima della perturbazione la particella si trovava nello stato fondamentale determinare al primo ordine perturbativo la probabilità di transizione al primo stato eccitato.

4. Un'onda elettromagnetica piana soddisfa l'equazione $\vec{H} = \hat{k} \wedge \vec{E}$, dove $\vec{E}$ è il campo elettrico, $\vec{H}$ il campo magnetico e $\hat{k}$ la direzione del moto. Mostrare che questa relazione è invariante per trasformazioni di Lorentz.

r

66

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica
Anno Accademico 2001-2002. Sessione Estiva
11-6-2002

1. Una particella di massa m è vincolata a muoversi all'interno di una sfera di raggio r_0, cioè è soggetta ad un potenziale del tipo $V(r) = 0$ per $r < r_0$ e $V(r) = +\infty$ per $r \geq r_0$ (una buca di potenziale sferica infinita).
Scrivere l'equazione differenziale che determina le autofunzioni e le autoenergie della particella e trovare le soluzioni con momento angolare nullo (l=0).

2. A t=0 la funzione d'onda di un atomo di idrogeno è data dalla seguente sovrapposizione di autostati ψ_{nlm}
$$|\psi>= \frac{1}{3}[2|\psi_{100}> + \sqrt{2}|\psi_{211}> + \sqrt{3}|\psi_{21-1}>]$$
Determinare la probabilità esatta che a $t > 0$ l'atomo di idrogeno si trovi in un autostato con $l = 1$.

3. Una particella è sottoposta alla Hamiltoniana
$$\hat{H} = \frac{\hat{l}_z^2}{2\mathcal{I}}$$
dove $\mathcal{I}$ è il momento d'inerzia. Calcolare la perturbazione al primo ordine all'energia dello stato fondamentale indotta dal potenziale
$$V = V_0 sin(2\phi)$$
dove ϕ è l'angolo azimutale.

4. Nell'acceleratore HERA, per studiare la struttura del protone fasci di elettroni con energia 27.5 GeV vengono fatti collidere frontalmente con fasci di protoni da 920 GeV.

a) Calcolare l'energia totale disponibile ai diversi canali di reazione nel riferimento del centro di massa.

b) Nella reazione anelastica $e + p \rightarrow e + X$, dove X è l'insieme dei frammenti dovuti alla disintegrazione del protone, calcolare il 4-impulso q trasferito da un elettrone rivelato a 90 gradi con energia $E'_e = 25GeV$.

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica
Anno Accademico 2001-2002. Sessione Estiva.
11-7-2002

PT

1. Dato un pendolo semplice di lunghezza ℓ e massa m, si indichi con θ l'angolo da esso formato rispetto alla verticale.
a) Scrivere l'Hamiltoniana H del sistema e sviluppare il potenziale $V(\theta)$ in serie di potenze di θ.
b) Calcolare le autoenergie di H_0, l'Hamiltoniana che si ottiene da H arrestandosi al termine in θ^2.
c) Calcolare, con il metodo perturbativo al primo ordine, la correzione all'energia dello stato fondamentale di H_0 che si ottiene quando si considera anche il termine successivo dello sviluppo di $V(\theta)$, cioè il termine in θ^4.

2. Si consideri il moto di un elettrone (massa m e carica e) in un potenziale centrale del tipo (detto potenziale di Yukawa):

$$V(r) = -\frac{e^2}{r}\exp(-\lambda r), \qquad \lambda > 0 \tag{1}$$

Scrivere l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo per la parte radiale e mostrare che essa ha le stesse soluzioni asintotiche (cioè per $r \to 0$ e per $r \to \infty$) dell'equazione radiale dell'atomo di idrogeno. Determinare i livelli energetici e le corrispettive autofunzioni al primo ordine in λ.

3. Nella transizione verso il livello con energia di eccitazione $E = 10.19$ eV un atomo di idrogeno emette un fotone con lunghezza d'onda $\lambda = 4890$ Å. Determinare l'energia di legame dell'elettrone nello stato iniziale ed i numeri quantici principali (n) dello stato iniziale e finale. Schematizzare la transizione ottenuta in un diagramma dei livelli energetici dell'atomo di idrogeno.

.../... *(continua sul retro)*

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica
5 settembre 2002

1. Una particella di massa m si trova in un potenziale unidimensionale

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{per } x < 0, \\ \frac{1}{2}\alpha x^2 & \text{per } x > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Valutare l'energia dello stato fondamentale col metodo variazionale.

riconsegnato 17/06/2013

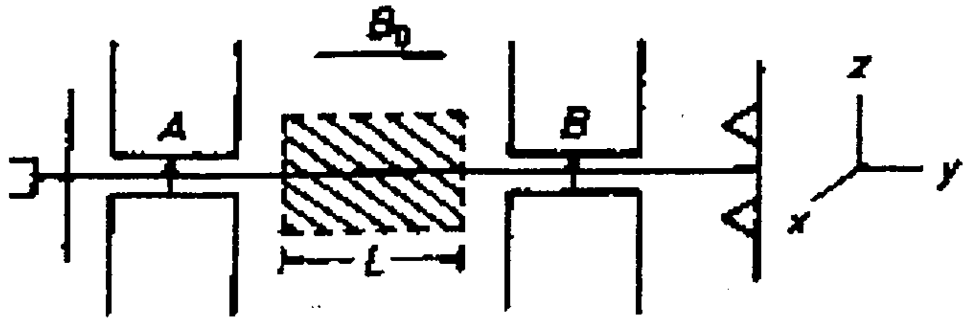
* 2. Una particella libera si trova inizialmente in uno stato formato dal pacchetto d'onde

$$\Psi(x, t=0) = N \int_{-\infty}^{\infty} dp \; e^{-\alpha(p-p_0)^2} \; e^{\frac{i}{\hbar}px}. \quad (2)$$

Determinare la posizione media ad un tempo $t > 0$ ed infine la costante di normalizzazione N.

3. Un positrone (e^+) di energia cinetica T viene annichilato su un bersaglio contenente elettroni (e^-) praticamente a riposo nel laboratorio, producendo due raggi γ. Ricavare l'energia di uno dei γ, nel sistema del laboratorio, in funzione dell'angolo tra la direzione di uscita dello stesso γ e la direzione del positrone incidente. Determinare, in particolare, qual é l'energia massima e minima possibile del γ in funzione del suo angolo di uscita. Usando semplici approssimazioni, valutare E_{max} ed E_{min} nei casi limite di T molto piccola e molto grande.

.../... continua sul retro



4. Un fascio di atomi d'argento emerge con velocitá v diretta lungo l'asse $\hat{y}$ con spin up lungo l'asse $\hat{z}$ da un apparato Stern-Gerlach, come in figura. Il fascio entra quindi in una regione di lunghezza L dove esiste un campo magnetico uniforme $\vec{B}_0$ diretto lungo l'asse del fascio. Dopo di ció il fascio entra in un altro apparato S-G identico al primo. Descrivere cosa si osserva all'uscita del secondo S-G, esprimendo le intensitá relative dei fasci risultanti in termini dei dati del problema.
Suggerimenti: Il momento magnetico dell'atomo Ag coincide essenzialmente con quello dell'elettrone di valenza disaccoppiato, $\vec{\mu} = -\frac{e}{m}\vec{s}$, dove $\vec{s} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ é lo spin dell'elettrone e $\vec{\sigma}$ sono le matrici di Pauli. Si ricordi altresí che vale la relazione

$$e^{i\sigma_y\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\,\sigma_y. \tag{3}$$

Si raccomanda di svolgere ciascun quesito su un foglio separato.

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica
Anno Accademico 2001-2002
3 Dicembre 2002

1. Un sistema quantico a tre livelli ($E_1 = 0\ eV$, $E_2 = 30\ eV$, $E_3 = 50\ eV$) nello stato fondamentale a $t = 0$, viene irradiato da radiazioni e.m. di energia $E_\gamma = 30\ eV$ per un tempo T. Si chiede quale deve essere il tempo T minimo affinchè la probabilità di eccitare il livello di energia E_3 sia trascurabile.

2. Un fascio di particelle di spin 1/2 (diretto lungo l'asse $\hat{y}$) esce da un apparato Stern-Gerlach (con il campo magnetico diretto lungo l'asse $\hat{z}$) nello stato di spin $|\sigma_z+\rangle$. Questo fascio viene poi inviato verso un analogo apparato che ha il campo magnetico orientato verso una direzione $\hat{n}$ perpendicolare a $\hat{y}$ ma che forma un angolo α rispetto all'asse $\hat{z}$. Determinare i numeri trelativi di particelle che compaiono nei due fasci che escono fuori dal secondo apparato. *Suggerimento: determinare le proiezioni su $|\sigma_z+\rangle$ degli autostati di $\hat{\sigma}_n$ nel formalismo delle matrici di Pauli*

3. Un rotatore rigido planare, avente un momento di inerzia I ed un momento di dipolo elettrico p, ruota liberamente nel piano $x-y$. Calcolare le correzioni al primo ordine ed al secondo ordine ai livelli energetici del rotatore se viene applicata una perturbazione esterna che consiste in un campo elettrico uniforme di intensità E diretto lungo l'asse positivo delle x. *Suggerimento Esprimere le funzioni d'onda del sistema in funzione dell'angolo azimutale ϕ.*

4. Un pione positivo decade *a riposo* in un rivelatore, $\pi^+ \to \mu^+ + x$, dove x é una particella *neutra* da identificare. Dal raggio di curvatura della traiettoria del muone μ^+ in un campo magnetico esterno viene determinato il suo impulso $p_\mu = 29.789455$ MeV/c. Calcolare la massa della particella x. [$M_\pi c^2 = 139.567$ MeV, $m_\mu c^2 = 105.6584$ MeV] Tenendo conto che il pione ha spin zero ed il muone $1/2\hbar$, cosa potrebbe essere la particella x?

Si raccomanda di svolgere ciascun quesito su un foglio separato.

10

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica
20 Febbraio 2003 (A.A. 2001-2002)

1. Un pione neutro decade "in volo" in due raggi γ. Calcolare l'intervallo di energia possibile per i γ rivelati nel laboratorio (a qualunque angolo). Il π^0 ha spin nullo e la distribuzione angolare $\frac{dN_\gamma}{d\vartheta_{CM}}$ é isotropa nel sistema di riferimento del centro di massa. Come vi aspettate che sia la distribuzione energetica (a qualunque angolo) e quella angolare (a qualunque energia) nel laboratorio?

2. Un sistema composto da due particelle distinguibili, entrambe di spin 1/2, si trova nello stato:
$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|++\rangle + \frac{1}{2}|-+\rangle - \frac{i}{2}|--\rangle$$
dove $|++\rangle \equiv |1+\rangle_z\ |2+\rangle_z$ rappresenta lo stato in cui sia la particella 1 che la particella 2 hanno proiezione dello spin up lungo l'asse delle z, ed analogamente: $|-+\rangle \equiv |1-\rangle_z\ |2+\rangle_z$; $|--\rangle \equiv |1-\rangle_z\ |2-\rangle_z$.
a) Se si fa una misura simultanea di $\hat{S}_{1y}$ e $\hat{S}_{2z}$, cioè della proiezione dello spin lungo l'asse delle y per la particella 1 e della proiezione dello spin lungo l'asse delle z per la particella 2, qual è la probabilità di ottenere $+\frac{\hbar}{2}$ per entrambe le particelle ?
b) Se si misura $\hat{S}_{2x}$, qual è la probabilità di ottenere $-\frac{\hbar}{2}$?

3. Una particella di spin $s = \frac{1}{2}$ e momento magnetico $\vec{\mu} = \gamma\vec{s}$ si muove lungo l'asse delle y attraverso un campo magnetico $\vec{B} = B\hat{e}_y$. Al tempo $t = 0$ lo stato del sistema è dato da $|\Psi(t = 0)\rangle = |+\rangle \equiv |z, +\rangle$
a) Esprimere lo stato del sistema $|\Psi(t\cancel{=0})\rangle$ ad ogni istante nella base degli autostati $|\pm\rangle_z$ di $\hat{S}_z$.
b) Esprimere i valori medi delle osservabili $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ in funzione del tempo.

4. Un rotatore rigido di Hamiltoniana: $\hat{H} = \frac{l^2}{2I}$ si trova all'istante $t = 0$ nello stato con $m = 0$. Dal tempo 0 a al tempo T agisce una perturbazione della forma $V = V_0 cos(\phi + \omega t)$ dove ϕ è l'angolo azimutale. Determinare la probabilità di transizione, al primo ordine perturbativo, nello stato con $m = +1$.

Si raccomanda di svolgere ciascun quesito su un foglio separato.

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica
1 Aprile 2003 (A.A. 2001-2002)

1. Una particella si trova confinata in una sfera di raggio R. Calcolare autovalori e autovettori di momento angolare $\ell = 0$.

2. L'hamiltoniano di una particella senza spin in moto in un campo magnetico $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = B_0\, \vec{e}_z$, costante e uniforme, è dato da

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2,$$

dove $\vec{P}$ è l'impulso coniugato di $\vec{R}$, mentre $\vec{A} = -B_0\, y\, \vec{e}_x$.
a) Provare che nel caso quantistico P_x e P_z sono costanti del moto.
b) Trovare i livelli di energia della particella.

3. Un sistema quantistico a due livelli di energia $E_1 = -1\, eV$ ed $E_2 = -2\, eV$ nella base degli autostati dell'hamiltoniano imperturbato H_0, viene descritto dalla matrice $\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$. Sul sistema agisce una perturbazione $\hat{W} = \begin{pmatrix} 0 & W \\ W & 0 \end{pmatrix}$ con $W = -\sqrt{2}\, eV$. Se inizialmente il sistema è nel ground state dell'Hamiltoniana $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}$, qual è la probabilità che il sistema si trovi nell'autostato dell'Hamiltoniano $\hat{H}_0$ con autovalore E_1 dopo un tempo t che la perturbazione $\hat{W}$ è stata rimossa ?

4. La luce impiega $\sim 10^5$ anni per raggiungere la Terra dalle parti più distanti della nostra galassia. Potrebbe un essere umano raggiungere questa periferia galattica, viaggiando ad una velocità costante per i prossimi 50 anni della sua vita? A che velocità?

Si raccomanda di svolgere ciascun quesito su un foglio separato.

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica
Anno Accademico 2001-2002. Sessione Autunnale ????
5-9-2002

1. **Determinare l'energia approssimata del ground state di un oscillatore armonico bidimensionale di massa m e frequenza ω usando il metodo variazionale e come funzione di prova la funzione: $\Psi(r) = Ce^{-\alpha r}$ con α variabile, $r = \sqrt{x^2+y^2}$ e C costante di normalizzazione uguale a $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha$. Confrontare il risultato ottenuto con il valore esatto dell'energia del ground state.**

   SOLUZIONE

   Innanzitutto si verifica immediatamente la corretta normalizzazione di $\Psi(r)$:

$$\int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\phi \, |\Psi(r)|^2 = 2\pi \int_0^\infty r|\Psi(r)|^2 dr = = 4\alpha^2 \int_0^\infty re^{-2\alpha r} dr = 1 \tag{1}$$

   dove l'integrale è stato risolto per parti.
   I valori medi dell'energia cinetica e dell'energia potenziale se il sistema è descritto dalla funzione d'onda $\Psi(r)$ sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} \bar{K} &= <\Psi|K|\Psi> = \frac{\hbar^2}{2m}\int_0^\infty |\frac{d}{dr}\Psi(r)|^2 2\pi r dr = \frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2 \\ \bar{U} &= <\Psi|U|\Psi> = \frac{1}{2}m\omega^2 \int_0^\infty r^2|\Psi(r)|^2 2\pi r dr = \frac{3}{4}m\omega^2\frac{1}{\alpha^2} \end{aligned} \tag{2}$$

   dove gli integrali sono stati valutati al solito per parti. A questo punto l'energia del sistema in funzione di α è:

$$E(\alpha) = \frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2 + \frac{3}{4}m\omega^2\frac{1}{\alpha^2} \tag{3}$$

   e l'energia minima

$$E_{min} = \sqrt{\frac{3}{2}}\hbar\omega \tag{4}$$

   si ottiene per $\alpha = (\frac{3}{2}\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2})^{\frac{1}{4}}$. Il valore che abbiamo ottenuto $E_{min} \sim 1.2\hbar\omega$ è di poco piú grande del valore esatto $\hbar\omega$.

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica
16 Dicembre 2003

1. Un positrone (e^+) di massa m ed energia *cinetica* uguale alla sua energia a riposo collide con un elettrone (e^-) a riposo. Dalla annichilazione vengono prodotti due fotoni di alta energia (γ). Un fotone viene rivelato in un rivelatore posto ad un angolo di 90° rispetto alla direzione del positrone incidente. Quali sono le energie di ciascun fotone? Qual è la direzione del moto del secondo fotone?

2. Un atomo alcalino nello stato fondamentale passa attraverso un apparato di Stern-Gerlach progettato in modo da trasmettere solo atomi che hanno lo spin orientato nella direzione $+\hat{z}$. L'atomo quindi passa un tempo τ in un campo magnetico $\mathbf{B}$ orientato nella direzione $\hat{x}$. Si chiede quale é la probabilitá che alla fine di questo tempo l'atomo possa attraversare un filtro di Stern-Gerlach per spin nella direzione $-\hat{z}$

3. Provare che, se un sistema quantistico è preparato in uno stato corrispondente al numero quantico m per la proiezione del momento angolare lungo l'asse $\hat{z}$, valgono le seguenti relazioni: $<\hat{L}_x>=<\hat{L}_y>=0$; $<\hat{L}_x\hat{L}_y>=-<\hat{L}_y\hat{L}_x>=im/2$; $<\hat{L}_x^2>=<\hat{L}_y^2>$.

4.

Si prega di svolgere ciascun quesitò su un foglio separato.

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica
22 Febbraio 2012

1. **Quesito 1**
Una particella di massa m, non soggetta a forze ma vincolata a muoversinell'intervallo $(0, a)$ dell'asse x, è stata preparata nello stato descritto dalla funzione d'onda:

$$\psi(x) = A\left[\varphi_1(x) + \varphi_2(x)\right]$$

dove $\varphi_i(x)$ denotano le funzioni d'onda normalizzate dei primi due livelli di energia del sistema. Calcolare:

   - il valor medio di posizione ed impulso della particella nello stato $\psi(x)$,
   - i valori possibili con le relative probabilità di una misura di energia

2. **Quesito 2**
Lo stato di una particella senza spin è descritto dalla funzione d'onda:

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} g(r)\left[e^{i\varphi} \sin\vartheta + \cos\vartheta\right]$$

dove

$$\int_0^\infty |g(r)|^2 r^2 dr = 1$$

Trovare:

   - i possibili risultati di una misura di L_z
   - le rispettive probabilità,
   - il valor medio di L_z

3. **Quesito 3**
Una particella di massa m è vincolata, da un potenziale esterno infinito, a muoversi dentro una sfera di raggio R e si trova in uno stato descritto da una funzione d'onda costante $\psi(x) = A$.

   - Determinare il valore di questa costante
   - Trovare (con le dovute motivazioni) i valori possibili del momento angolare orbitale,
   - trovare i valori possibili dell'energia
   - con le rispettive probabilità

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica
07 Maggio 2012

1. **Quesito 1**
Una particella di massa m, vincolata a muoversi lungo l'asse x, è stata preparata nello stato descritto dalla funzione d'onda:

$$\psi(x) \;=\; A\cos(k_1 x) + B\cos(k_2 x)$$

Calcolare:

- i possibili risultati delle misure di impulso
- e le rispettive probabilità

2. **Quesito 2**
Una particella senza spin, vincolata a muoversi nel piano (x,y), si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda :

$$\psi(\rho,\varphi) \;=\; Ae^{-\rho^2/2a^2}\cos^2(\varphi)$$

dove ρ e φ sono le coordinate polari.

- Calcolare le probabilità che una misura di L_z produca i risultati $0, \hbar, 2\hbar$.
- Calcolare il valor medio di L_z.
- Dire inoltre (con validi argomenti) se la funzione ψ è autofunzione di L^2

3. **Quesito 3**
La dinamica di un sistema quantistico è regolata dall'Hamiltoniano:

$$H \;=\; \frac{\omega_1}{\hbar}L_z^2 \;+\; \omega_2 L_x$$

dove ω_i sono costanti reali.
Determinare lo spettro energetico del sistema sotto la condizione che l'autovalore di L^2 sia $2\hbar^2$.

4. **Quesito 4**
Determinare gli autostati normalizzati di L_x e di L_y, con $\ell = 1$, in termini degli autostati normalizzati di L^2 ed L_z.

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica
22 Giugno 2012

1. **Quesito 1**
   Sia $|\,\psi\,\rangle$ uno stato di oscillatore armonico di frequenza ωe massa m, descritto da una combinazione lineare dello stato fondamentale e del I^o stato eccitato:

   $$|\,\psi\,\rangle \;=\; c_0|\,0\,\rangle \;+\; c_1|\,1\,\rangle$$

   Trovare il rapporto c_0/c_1 sapendo che

   $$\texttt{caso 1:}\;\langle\, H\,\rangle \;=\; \hbar\omega \qquad , \qquad \texttt{caso 2:}\;\langle\, x\,\rangle \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

2. **Quesito 2**
   Determinare lo spettro energetico ed il raggio quadratico medio del positronio, cioè del sistema formato da un elettrone ed un positrone legati dall'interazione coulombiana. Non mettere in conto l'esistenza dello spin.

3. **Quesito 3**
   Una particella libera, vincolata a muoversi lungo l'asse $\hat{x}$, si trova all'istante t nello stato descritto dalla seguente funzione d'onda:

   $$\psi(x,0) \;=\; N\int_{-\infty}^{+\infty} \exp -\frac{|k|}{k_0}\, \exp\left(\imath k x\right) dk$$

   dove N e k_0 sono due costanti.

   1) - Qual'è la probabilità $P(p_1, 0)$ che una misura di impulso eseguita all'istante $t = 0$ generi un risultato compreso nell'intervallo $(-p_1, p_1)$?
   2) Cosa si può dire di questa probabilità se la misura viene effettuata ad un istante t successivo?

4. **Quesito 4**
   Un atomo di idrogeno si trova in un autostato dell'hamiltoniana con energia

   $$E \;=\; \frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}$$

   con $n = 2$. Sapendo che la misura di L_x produce $\hbar$ con probabilità $1/4$ e $-\hbar$ con probabilità $1/2$,e che la misura di L^2 produce $2\hbar^2$ con probabilità $3/4$, determinare il valore medio di L_y ed L_z.