Compito di Istituzioni di Fisica Teorica

8-1-1999

1) Si consideri una particella di velocità v, spin $\frac{1}{2}$ e proiezione dello spin $s_z = +\frac{\hbar}{2}$. La particella attraversa una regione di lunghezza L in cui è presente un campo magnetico B_0 in direzione x. Determinare la probabilità che all'uscita da tale regione la proiezione s_z dello spin sia ancora $+\frac{\hbar}{2}$.
[porre $\omega_0 = -\gamma B_0$, dove γ è il rapporto giromagnetico della particella.]

dato il 11/06/12

2) Sia $|\psi\rangle$ uno stato dell'oscillatore armonico di frequenza ω e massa m, descritto da una combinazione lineare dello stato fondamentale e del primo stato eccitato:

$$|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle.$$

Trovare il rapporto tra c_0 e c_1 sapendo che $\langle \hat{H} \rangle = \hbar\omega$ e $\langle \hat{x} \rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$.

3) Sia dato un sistema fisico arbitrario descritto da uno stato $|\psi\rangle$ e sia $\langle \hat{\mathbf{J}} \rangle$ il valor medio del momento angolare del sistema (in particolare poniamo gli assi cartesiani in modo che sia $\langle \hat{J}_x \rangle = \langle \hat{J}_y \rangle = 0$. Mostrare che

$$(\Delta J_x)^2 + (\Delta J_y)^2 \geq \hbar |\langle \hat{J}_z \rangle|$$

Mostrare che la relazione precedente diventa una eguaglianza nel caso in cui $\hat{J}_+|\psi\rangle = 0$ oppure $\hat{J}_-|\psi\rangle = 0$.

4) Un mesone K in moto nel sistema di riferimento del laboratorio si disintegra in due mesoni π. Uno dei due mesoni π è in quiete nel sistema di riferimento del laboratorio. Quali sono l'energia iniziale del mesone K e dell'altro mesone π?
[La massa a riposo del mesone K è 494 Mev e quella del mesone $\pi \sim 137$ Mev.]

42

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica

30-03-1999

1) Un osservatore solidale con il riferimento inerziale $Oxyz$ rileva la presenza del campo elettromagnetico costante e non uniforme

$$E_z = E_0 \cos(kx), \quad E_x = E_y = 0$$

$$H_x = H_y = H_z = 0.$$

Determinare il campo misurato nel generico punto x' ed al tempo t' dall'osservatore O' in moto con velocità β lungo l'asse x rispetto ad O. Determinare inoltre in entrambi i riferimenti la forza che il campo elettromagnetico esercita su una carica q in quiete in $Oxyz$.

2) Una particella di massa m, vincolata a muoversi lungo l'asse x è soggetta al potenziale

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ -V, & 0 < x < a \\ 0, & x > a \end{cases}$$

Sapendo che l'energia del suo stato fondamentale è $E_0 = -V/2$ determinare a.

X 3) Sia dato un sistema di momento angolare $l = 1$, descritto da uno stato combinazione lineare degli autostati simultanei $|l, m\rangle$ di $\hat{L}^2$ e $\hat{L}_z$:

$$|\psi\rangle = \alpha|1,1\rangle + \beta|1,0\rangle + \gamma|1,-1\rangle$$

Esprimere gli scarti quadratici medi ΔL_x, ΔL_y e ΔL_z in termini dei parametri α, β e γ. Verificare quindi le relazioni di indeterminazione tra gli operatori $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ e $\hat{L}_z$.

4) Si consideri un sistema composto da due spin 1/2, $\vec{S}_1$ e $\vec{S}_2$, descritto all'istante $t = 0$ dalla seguente combinazione degli stati di base $|++\rangle$, $|+-\rangle$, $|-+\rangle$ e $|--\rangle$:

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{2}|++\rangle + \frac{1}{2}|+-\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|--\rangle$$

(Ricordiamo, a titolo di esempio, che lo stato $|+-\rangle = |+\rangle_1|-\rangle_2$ rappresenta lo stato in cui il primo spin ha proiezione $+1/2$ e il secondo proiezione $-1/2$)

Si faccia evolvere il sistema sotto l'influenza dell'hamiltoniana

$$\hat{H} = \omega_1 \hat{S}_{1z} + \omega_2 \hat{S}_{2z}$$

Calcolare i valori medi $\langle \hat{S}_{1z} \rangle$ e $\langle \hat{S}_{1x} \rangle$ in funzione del tempo t.

4B

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica

15-06-1999

rieseguito il 19/07/2012

1 Una particella è confinata in una regione divisa in due cellette da un setto attraverso cui può passare per effetto tunneling. Indichiamo con $|s>$ ($|d>$) lo stato normalizzato ad uno in cui la particella si trova nella celletta di sinistra (destra). La hamiltoniana del sistema sia

$$\hat{H} = E_0(|s><s| - |d><d|) + \Delta(|s><d| + |d><s|)$$

Calcolare la probabilità che la particella occupi la celletta di sinistra o di destra quando si trova nello stato fondamentale.

2 Un sistema quantico è governato dalla Hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{\hat{L}^2}{2I} - \alpha \hat{L}_z$$

dove I è il momento d'inerzia. Determinare al primo ordine perturbativo le possibili transizioni dallo stato fondamentale $|00\rangle$ indotte da un potenziale $\hat{V} = \hat{V}_0 cos(\omega t)$ dovuto ad un campo uniforme agente lungo l'asse z. Determinare la frequenza ω di risonanza.

3 Stimare con il metodo variazionale l'energia dello stato fondamentale di un sistema unidimensionale avente Hamiltoniana

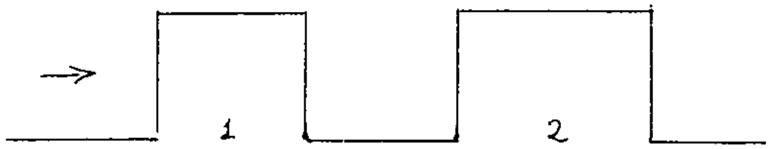
$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \alpha \hat{x}^4$$

prendendo come stato di prova lo stato fondamentale di un oscillatore armonico la cui frequenza ω è presa come parametro variazionale.

4 Due fasci di particelle A e B identici, collidono da parte opposta con velocità β e $-\beta$ rispettivamente, nel riferimento del laboratorio. Detta $\vec{J}$ la densità di corrente (particelle per unità di superficie per unità di tempo) del fascio A, determinare la stessa densità di corrente misurata in un riferimento solidale con le particelle del fascio B.

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica
12-07-1999

1 Una particella di energia $E = 4eV$ incontra due barriere repulsive di larghezza L_1 ed L_2, rispettivamente, ma aventi la stessa altezza $U_0 = 2eV$. come illustrato in figura.



La particella viaggia entro la prima barriere con numero d'onda tale che $k_1 L_1 = \pi$ ed entro la seconda $k_2 L_2 = \pi/2$. Determinare la probabilità che la particella venga riflessa all'indietro.

2 Un fascio di elettroni, preparato all'istante $t = 0$ nello stato di spin

$$|\psi >= |+ > +|- >$$

(il segno + indica $S_z = \frac{\hbar}{2}$ e il segno - $S_z = -\frac{\hbar}{2}$) attraversa un campo magnetico B, con cui interagisce secondo la Hamiltoniana $H = \omega S_z$ ($\omega = \frac{eB}{mc}$). Determinare la probabilità che il sistema si trovi nello stesso stato all'istante $t > 0$.

3 Una particella si trova sottoposta ad un potenziale unidimensionale di oscillatore armonico di frequenza angolare ω. La posizione media della particella nel suo stato fondamentale è nell'origine. Introdotta una piccola perturbazione $V = -k\hat{x}$, determinare la posizione media della particella al primo ordine perturbativo. Trovato il risultato dire se questo si poteva ottenere immediatamente senza ricorso alla teoria perturbativa.

4 Due particelle, lanciate all'istante $t = 0$ alla stessa velocità una lungo l'asse x ed una lungo l'asse y di un riferimento ortogonale O, colpiscono simultaneamente due bersagli posti linfgo i due assi alla stessa distanza D dall'origine. Un osservatore O' ($O' = O$ a $t' = t = 0$) si muove di moto rettilineo e uniforme lungo un asse x', che forma un angolo α con l'asse x del riferimento, O con velocità V_0. Calcolare in O' gli istanti in cui le due particelle raggingono i rispettivi bersagli.

44 bis

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica

7-9-1999

1) Una particella di carica q si trova immersa in un potenziale di oscillatore armonico isotropo di frequenza angolare ω. Sia la particella sottoposta a un campo elettrico costante E_z. Determinare la variazione di energia con un metodo puramente algebrico. Mostrare che può anche essere ottenuta da un calcolo variazionale.

2) Un fascio di atomi di momento angolare $J = 1$ viene preparato nello stato di proiezione $M = 0$ lungo l'asse z. Il fascio, diretto lungo l'asse x, attraversa un apparato di Stern e Gerlach con campo magnetico disomogeneo giacente nel piano yz e formante un piccolo angolo α con l'asse z (con $\alpha^2 \ll \alpha$). Determinare il numero di componenti in cui l'apparato divide il fascio e le rispettive probabilità di transizione al primo ordine in α.

3) Due particelle di massa m interagiscono tramite un potenziale attrattivo costante per $0 < r < a$ e nullo per $r > a$ (dove r è la distanza tra le particelle). Determinare le condizioni che garantiscono l'esistenza di almeno uno stato legato.

4) Un astronauta, in moto con la sua astronave a velocità costante, "vede" una stella S ad un angolo α rispetto alla direzione di moto. Sapendo che nel riferimento solidale con la stella l'astronave ha una velocità β, dire di quale angolo deve variare la sua rotta l'astronauta per raggiungere la stella S.

45

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica
10-12-1999

1 Una particella di massa m e carica q è soggetta ad un potenziale di oscillatore armonico

$$V = \frac{k}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right).$$

Al tempo $t = -\infty$ l'oscillatore si trova nel suo stato fondamentale. Viene quindi perturbato da un campo elettrico uniforme nella direzione z e dipendente dal tempo

$$\mathbf{E}(t) = A\ e^{-(t/\tau)^2},$$

dove A e τ sono costanti. Calcolare, all'ordine piú basso in teoria delle perturbazioni, la probabilità che l'oscillatore sia in un qualsiasi stato eccitato al tempo $t = \infty$.

2 Determinare, col metodo variazionale, l'energia dello stato fondamentale del deutone descritto dal potenziale di interazione

$$V(r) = -V_0\ \exp(-r/a),$$

dove r è la distanza tra i due nucleoni, V_0 ed a sono costanti positive. Si assuma come funzione d'onda di prova (normalizzata a 1)

$$f(r) = \sqrt{\frac{\lambda^3}{8\pi a^3}}\ \exp\left(\frac{-\lambda r}{2a}\right),$$

con λ parametro variazionale.

* **3** Dato un oscillatore armonico bidimensionale isotropo nel piano $x-y$, di hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2}\ m\omega^2\ \left(\hat{x}^2 + \hat{y}^2\right),$$

determinare quegli autostati simultanei del momento angolare orbitale $\hat{L}_z$ e della hamiltoniana, che si ottengono diagonalizzando $\hat{L}_z$ nel sottospazio degli autostati di $\hat{H}$ appartenenti all'autovalore $2\hbar\omega$.

4 In un acceleratore due fasci di protoni da 30 GeV ciascuno (energia cinetica + massa) vengono fatti collidere frontalmente. Calcolare l'energia che un fascio di protoni dovrebbe possedere in un acceleratore a bersaglio fisso (sempre di protoni) affinchè l'energia totale disponibile nel sistema del centro di massa sia la stessa del collider precedente.

46

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica
7 - 1 - 2000

1 Un elettrone e la sua antiparticella, il positrone, possono formare un sistema legato, detto *positronio.* Sapendo che il potenziale di ionizzazione dell'atomo di idrogeno è 13.6 V, calcolare il potenziale di ionizzazione del positronio.

2 Degli atomi di idrogeno sono soggetti simultaneamente all'azione di un debole campo magnetico ed un debole campo elettrico paralleli ed entrambi costanti. Trascurando la presenza dello spin dire, al primo ordine della teoria perturbativa, quale deve essere il rapporto tra i campi affinchè la generica transizione dallo stato $n = 2$ allo stato $n = 1$ sia caratterizzata dalla presenza di solo due righe spettrali. (Non è necessario calcolare esplicitamente gli elementi di matrice non nulli, ma è sufficiente lasciare indicati i relativi integrali).

3 Una particella di massa m e carica q si trova nello stato fondamentale in un potenziale centrale $V(r)$ finito in tutto lo spazio e caratterizzato dalla presenza di un minimo assoluto nell'origine $V(0) = V_0$. Denotando $V_2 = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right)_{r=0}$, e trascurando i termini di ordine superiore a r^2 nello sviluppo di $V(r)$ intorno all'origine, determinare la probabilità di transizione al primo stato eccitato in presenza di un debole campo elettrico uniforme che oscilla sinusoidalmente nel tempo con una pulsazione ω prossima alla condizione di risonanza.

4 Un'astronave lunga 100 metri (a riposo) impiega 4 μs per passare davanti ad un osservatore sulla terra. Qual è la sua velocità relativa alla terra?

rieseguito 08/07/13

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica
7 - 1 - 2000

1 Un elettrone e la sua antiparticella, il positrone, possono formare un sistema legato, detto *positronio*. Sapendo che il potenziale di ionizzazione dell'atomo di idrogeno è 13.6 V, calcolare il potenziale di ionizzazione del positronio.

2 Degli atomi di idrogeno sono soggetti simultaneamente all'azione di un debole campo magnetico ed un debole campo elettrico paralleli ed entrambi costanti. Trascurando la presenza dello spin dire, al primo ordine della teoria perturbativa, quale deve essere il rapporto tra i campi affinchè la generica transizione dallo stato $n = 2$ allo stato $n = 1$ sia caratterizzata dalla presenza di solo due righe spettrali. (Non è necessario calcolare esplicitamente gli elementi di matrice non nulli, ma è sufficiente lasciare indicati i relativi integrali).

3 Una particella di massa m e carica q si trova nello stato fondamentale in un potenziale centrale $V(r)$ finito in tutto lo spazio e caratterizzato dalla presenza di un minimo assoluto nell'origine $V(0) = V_0$. Denotando $V_2 = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right)_{r=0}$, e trascurando i termini di ordine superiore a r^2 nello sviluppo di $V(r)$ intorno all'origine, determinare la probabilità di transizione al primo stato eccitato in presenza di un debole campo elettrico uniforme che oscilla sinusoidalmente nel tempo con una pulsazione ω prossima alla condizione di risonanza.

4 Un'astronave lunga 100 metri (a riposo) impiega 4 μs per passare davanti ad un osservatore sulla terra. Qual è la sua velocità relativa alla terra?

49

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica

11 - 4 - 2000

1) Un particolare ceppo di batteri raddoppia in numero ogni 20 giorni. Due di questi batteri sono posti su un'astronave che viaggia ad una velocità di 0.995 c. Quanti batteri ci saranno sull'astronave al suo ritorno sulla terra dopo 1000 giorni?

2) Un atomo di idrogeno è perturbato da un debole campo elettrico uniforme dipendente dal tempo secondo la legge

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \; e^{-|t|/\tau}.$$

Sapendo che a $t = -\infty$ l'atomo si trova nel suo stato fondamentale, determinare il parametro τ per cui è massima la probabilità di trovare l'atomo nel primo stato eccitato a $t = +\infty$.

3) Una particella si trova confinata in una buca di potenziale unidimensionale a pareti infinite e larghezza 2ℓ (il potenziale diverge per $|x| > \ell$ ed è costante per $|x| < \ell$). La particella è preparata nello stato con funzione d'onda

$$\psi(x) = \begin{cases} c(x^2 - \ell^2) & \text{per } |x| \leq \ell, \\ 0 & \text{per } |x| > \ell. \end{cases}$$

Determinare la probabilità che una misura di energia dia come risultato l'autovalore E_n.

4) Due particelle cariche si trovano in un potenziale armonico tridimensionale isotropo. Determinare al primo ordine perturbativo la correzione all'energia dello stato fondamentale imperturbato dovuta all'interazione coulombiana.

50

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica
1 - 6 - 2000

1) Determinare una trasformazione di Lorentz non banale che lasci invariata l'energia di un fotone di frequenza ω.

2) Un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e frequenza ω è soggetto alla perturbazione

$$\hat{V} = \hbar\omega\left(e^{-\gamma\hat{x}} - 1\right)$$

con $\gamma \ll \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}$. Determinare perturbativamente l'energia dello stato fondamentale al secondo ordine in γ utilizzando il formalismo degli operatori di creazione ed annichilazione.

fatto * 3) Un rotatore rigido di Hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{\hat{L}^2}{2I} + \omega\hat{L}_z$$

si trova al tempo $t = 0$ nello stato

$$|\psi\rangle = N\left(|1,1\rangle + |1,0\rangle\right)$$

dove $|l,m\rangle$ sono gli autostati simultanei di $\hat{L}^2$ ed $\hat{L}_z$. Determinare il valore medio di $\hat{L}_y$ al tempo $t > 0$ utilizzando le equazioni di Heisenberg.

19/07/12 4) Una particella di massa m, confinata all'interno di una buca di potenziale unidimensionale a pareti rigide ($V(x) = \infty$ per $|x| > a$, $V(x) = 0$ per $|x| < a$), si trova a $t = 0$ nello stato

$$|\Psi\rangle = |\Psi_1\rangle + |\Psi_2\rangle$$

dove $|\Psi_1\rangle$ e $|\Psi_2\rangle$ sono i due autostati di energia più bassa dell'Hamiltoniano. Determinare la probabilità che al tempo $t > 0$ la particella si trovi nella regione $x > 0$.

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica
12 - 6 - 2000

1) Il decadimento di un fascio di particelle radioattive viene misurato all'uscita di un acceleratore. Si trova che, in media, ciascuna particella "vive" 20 ns (dopo di che decade in altre particelle). Se la misura avviene con le particelle a riposo nel laboratorio, le stesse particelle "vivono" 7.5 ns in media.
   a) Qual è la velocità del fascio di particelle?
   b) Determinare un sistema di riferimento in cui l'energia cinetica di ogni particella (prima del decadimento) sia uguale alla sua energia a riposo.

2) Due particelle non interagenti, di massa uguale m, si trovano in un potenziale unidimensionale
$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 < x < 2a, \\ \infty & \text{altrove.} \end{cases}$$
   a) Quali sono le energie dei 4 livelli più bassi del sistema di due particelle?
   b) Qual è la degenerazione del livello più basso se le due particelle sono identiche con spin 1/2?

3) Una particella si trova in una buca di potenziale a pareti infinite in $x = 0$ e $x = \ell$. Determinare la relazione fra le autofunzioni di questa buca e quelle della buca traslata di $-\ell/2$.

4) Un rotatore rigido isotropo viene sottoposto per un tempo T ad una forza di richiamo $F_z = -kz$. Determinare, al primo ordine perturbativo, le possibili transizioni dallo stato fondamentale.

fatto in esercitaz. 03/2012

3) Un rotatore rigido con simmetria assiale ha momenti di inerzia $I_x = I_y$ e I_z ed è descritto dall'hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2I_x}\left(L_x^2 + L_y^2\right) + \frac{1}{2I_z}L_z^2.$$

dove $L_{x,y,z}$ sono gli operatori di momento angolare riferiti agli assi del rotatore.

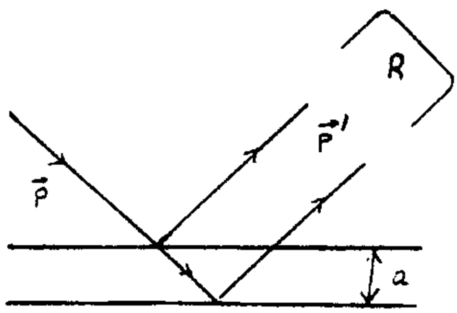
a) Calcolare autovalori ed autostati dell'hamiltoniana.

b) Se lo stato del rotatore al tempo $t = 0$ è $|\ell = 3, m = 0>$, qual è la probanilità che una misura di L_z dopo un tempo Δt dia il valore $\hbar$?

4) Un fotone di impulso **p** urta elasticamente con un reticolo, come indicato in figura, nel primo o nel secondo piano reticolare (senza rifrazione). L'ampiezza di diffusione nel primo piano è

$$A = < \mathbf{p}|\hat{G}|\mathbf{p}' > .$$

Determinare la probabilità di rivelazione in R, sapendo che la costante reticolare è a.



52

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica
11 - 7 - 2000

1) Si osserva fra i raggi cosmici una particella con energia di 16 J (10^{20} eV).

   a) Se la particella è un protone ($mc^2 \approx 1$ GeV) quanto tempo impiega per attraversare la nostra galassia (diametro $\sim 10^5$ anni-luce) *misurando il tempo dal sistema di riferimento del protone?* Quanto tempo se misurato dalla terra? [volendo esprimere la risposta in secondi, si può approssimare 1 anno $\approx 32 \times 10^6$ s].

   b) Calcolare l'energia di una particella, in termini della sua energia a riposo, affinché il diametro della galassia le appaia contratto fino alle dimensioni tipiche di una particella elementare (circa 1 *fermi* $= 10^{-15}$ m). Quanta massa bisognerebbe convertire in energia per dare ad un protone la velocità necessaria per tale contrazione?

yes → 2) Si consideri l'hamiltoniana di un oscillatore armonico unidimensionale.

→ a) Per la famiglia di funzioni d'onda di parametro $\alpha > 0$,

$$\Psi_\alpha(x) = e^{-\alpha x^2},$$

VAR

trovare la funzione d'onda che minimizza il valor medio dell'hamiltoniana. Quanto vale $< H >_{min}$?

   b) Ripetere lo stesso procedimento per la funzione

$$\Psi_\gamma(x) = \frac{1}{x^2 + \gamma} \qquad (\gamma > 0),$$

confrontare $< H >_{min}$ con il valori ottenuti in a) e *commentare i risultati.*

(N0 1650) → ASSEGNARE

53

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica
19 settembre 2000

1) Calcolare la somma dei quadrati delle indeterminazioni $(\Delta L_x)^2 + (\Delta L_y)^2$ in un autostato $|\ell\, m>$ di $\hat{L}^2$ e $\hat{L}_z$. Stabilire per quali valori di ℓ e m la somma si annulla.
(riassegnato 15/12/2010)

PT

2) Si consideri una particella in una buca di potenziale infinita in due dimensioni:

$$V(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{nel quadrato} \quad 0 \le x \le L \;\text{ e }\; 0 \le y \le L; \\ \infty, & \text{altrove.} \end{cases}$$

Scrivere autoenergie e autofunzioni del sistema. Se la particella è soggetta alla perturbazione

$$W(x,y) = \lambda\, xy,$$

dove λ è una costante, calcolare la correzione dei livelli energetici al primo ordine perturbativo.

3) Due particelle di uguale massa sono soggette al medesimo potenziale di oscillatore armonico. Esprimere la densità di probabilità che la distanza tra le due particelle sia d, quando il sistema si trova nel suo primo stato eccitato con funzione d'onda del moto relativo pari.

4) Una carica q si muove di moto rettilineo e uniforme con velocità v_0 nel riferimento O dove tuttavia è presente un campo elettrico $\vec{E}$ e un campo magnetico $\vec{H}$.
Qual'è la relazione tra $\vec{E}$ ed $\vec{H}$? Qual'è il campo elettrico nel riferimento solidale con la carica?

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(r_1 - r_2) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(r_1 + r_2) \end{cases} \qquad \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2+y^2)$$

$$p_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 - p_2) = \sqrt{2}\, p_r \quad \left(p_r = \mu v_r = \frac{p_1 - p_2}{2}\right)$$

$$p_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 + p_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} P_{TOT}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} r; \quad y = \sqrt{2} R$$

$$H = \frac{P_{TOT}^2}{2(2m)} + \frac{1}{2} m\omega^2 (2R^2) + \frac{p_r^2}{2(m/2)} + \frac{1}{2} m\omega^2 \frac{r^2}{2}$$

$$H = \frac{P_{TOT}^2}{2M} + \frac{1}{2} M\omega^2 R^2 + \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{1}{2} \mu\omega^2 r^2 \qquad \Psi(r, R) = \phi_n(r)\,\phi_m(R)$$

$$d\mathbb{P} = |\phi_n(r)|^2 |\phi_m(R)|^2 dr\, dR; \qquad \frac{d\mathbb{P}}{dr} = \int dR\, |\phi_m(R)|^2 |\phi_n(r)|^2 = |\phi_n(r)|^2$$

1° eccitato $|1,0\rangle, |0,1\rangle$ Pari $\to$ $\phi_0(r)\phi_1(R)$ $\quad \frac{d\mathbb{P}}{dr} = |\phi_0(r)|^2 = N \left| e^{-\left(\frac{\mu\omega}{2\hbar}\right) r^2} \right|^2$

54

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica
18-12-2000

1) Una particella decade in due fotoni diretti uno a 45^o e l'altro ortogonalmente rispetto alla direzione del moto del centro di massa. Determinare la velocità della particella.

2) Un apparato sperimentale produce e rivela solo particelle di spin $S = \frac{1}{2}$ che si trovano nello stato:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle + |-\rangle]$$

dove $|\pm\rangle$ sono gli autostati di $\hat{S}_z$. Se l'apparato è ruotato di un angolo θ intorno all'asse z, quale è la probabilità che esso riveli nello stato $|\Psi\rangle$ una particella prodotta dallo stesso apparato prima della rotazione? Come potrebbe essere realizzato un simile apparato ?

yes $\longrightarrow$ 3) Un oscillatore armonico unidimensionale si trova al tempo $t = 0$ in un generico stato $|\Psi(0)\rangle$. Determinare l'evoluzione temporale del valore medio della posizione $\hat{x}$

$$\langle \hat{x} \rangle = \langle \Psi(t)|\hat{x}|\Psi(t)\rangle$$

facendo uso delle equazioni di Heisenberg, sapendo che per $t = 0$ i valori medi di posizione ed impulso sono $\langle \hat{x} \rangle = 0$ e $\langle \hat{p} \rangle = p_0$. Confrontare il risultato con la legge oraria dell'oscillatore classico.

4) Un atomo di trizio (^3H) si trova nel suo stato fondamentale allorchè il nucleo decade in quello di ^3He con l'emissione di una particella β che sfugge dall'atomo senza perturbare l'elettrone orbitante. Trovare la probabilità che lo ione finale $^3He^+$ rimanga nello stato $1s$. Qual è la regola di selezione per il numero quantico orbitale ℓ nella transizione?

56

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica

15 Febbraio 2001

1) Una sorgente emette due segnali luminosi di frequenza ν_1 e $\nu_2 = \alpha\nu_1$ in versi opposti lungo la stessa direzione. Determinare modulo e verso della velocità, rispetto alla sorgente, di un osservatore, in moto lungo la direzione di emissione dei due segnali, che li veda con frequenze uguali. Discutere il risultato in funzione del parametro α.

18 dic. 2012

2) Si consideri un pendolo semplice di lunghezza $\ell = 1$ m e massa $m = 1$ kg. Calcolare l'ampiezza classica di oscillazione associata all'energia dello stato fondamentale (quantistico) del pendolo.

yes → rieseguito 17/06/2013

3) Ricavare le relazioni di indeterminazione tra gli operatori energia cinetica e posizione per un sistema unidimensionale di massa m in uno stato normalizzato. Discutere il caso in cui tale stato sia un autostato dell'oscillatore armonico.

4) Un oscillatore armonico lineare di pulsazione ω viene sottoposto ad una perturbazione $\lambda\hbar\omega\hat{y}^3$, dove y è la coordinata del moto. Calcolare, fino al secondo ordine perturbativo, l'energia dello stato fondamentale.

57

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica

3 - 4 - 2001

1) Un oscillatore armonico unidimensionale viene preparato a $t = 0$ nello stato

riassegnato 15/12/2010

$$|\Psi, 0> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n> + |n+1>),$$

essendo $|n>$ e $|n+1>$ autostati dell'hamiltoniana.
Determinare la dipendenza dal tempo del valor medio della posizione.

2) Due oscillatori armonici unidimensionali *identici* interagiscono col potenziale $V = \epsilon x_1 x_2$, dove x_1 e x_2 sono le coordinate dei due oscillatori. Calcolare i livelli di energia del sistema.

PT

3) Il livello di momento angolare $J = 1$ di un atomo è stato separato (energeticamente) in tre livelli di energia, corrispondenti ai 3 valori possibili per la proiezione lungo l' asse z. L'atomo viene sottoposto <u>per un tempo T</u> ad un campo magnetico diretto lungo x. Se all'istante $t = 0$ l'atomo si trova nella sovrapposizione

$$|\Psi, 0> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\ 1> + |1\ -1>)$$

calcolare, al primo ordine perturbativo, la probabilità di transizione allo stato $|1\ 0>$ per $t >$ T.

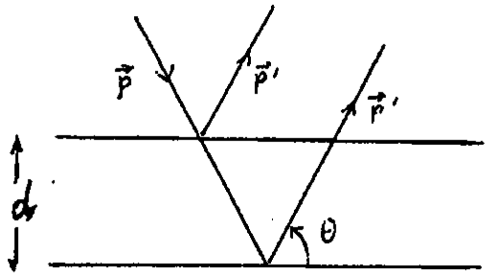
4) Una particella libera di massa m_1, inizialmente a riposo, viene colpita da una seconda particella di massa $m_2 \neq m_1$ ed energia cinetica T. Dopo la collisione le due particelle formano un singolo sistema.
Calcolare la massa M del sistema composto. Se $M \neq m_1 + m_2$ viene violata una legge di conservazione? Cosa succede al limite non relativistico?

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica
8 giugno 2001

eseguito 18 dic. 2012

1) Calcolare l'effetto dell'operatore momento angolare (orbitale) lungo l'asse x, $\hat{L}_x$, sugli autostati $|\ell m>$ comuni a $\hat{L}^2$ e $\hat{L}_z$ con autovalore $\ell = 1$; quindi determinare autovalori ed autostati di $\hat{L}_x$.

2) Un fotone di impulso p incide su un cristallo a doppio strato. Assumiamo che l'ampiezza di diffusione elastica sia $< \mathbf{p}|\hat{A}|\mathbf{p}' >$. Determinare la probabilità di osservare il fotone nello stato d'impulso $\mathbf{p}'$.



3) Un rotatore piano, avente hamiltoniana $H_0 = \hat{L}_z^2/2I$, è sottoposto per un tempo T ad una perturbazione $V = V_0 cos\varphi$, dove φ è l'angolo azimutale nel piano $x-y$. Supposto che a t=0 il rotatore si trovi nello stato

$$|\psi_0 >= \frac{1}{\sqrt{2}}(|m > +| -m >),$$

calcolare al primo ordine perturbativo la probabilità di transizione allo stato fondamentale.

4) Un positrone e^+ con energia cinetica T viene annichilato su un bersaglio contenente elettroni e^- praticamente a riposo nel sistema di riferimento del laboratorio. Due rivelatori equidistanti dal bersaglio e posti ad angoli di 30° e 120° rispetto alla direzione del fascio di e^+ incidenti rivelano soltanto raggi γ in coincidenza (simultanei). Determinare l'energia cinetica del positrone che ha prodotto l'evento.