21)

Compito di istituzioni di Fisica Teorica

Sessione autunnale 12-11-1993

1) Un nucleo eccitato con velocità V decade emettendo un fotone di energia $E = 1.\ Mev$ in direzione ortogonale alla sua direzione di moto. Il fotone colpisce un elettrone in quiete nel laboratorio e viene diffuso ad un angolo θ=60°. Determinare l'energia del fotone diffuso.

2) Due missili viaggiano nella stessa direzione e verso con velocità V_1 e V_2 rispetto al riferimento terrestre. All'istante t=0, quando i due missili si trovano a distanza D l'uno dall'altro, il primo missile emette un segnale di velocità V (rispetto al suo riferimento). Determinare nel riferimento del primo missile l'istante in cui il segnale raggiunge il secondo missile.

3) Una particella può occupare ciascuna delle due parti in cui una scatola è divisa da una barriera di potenziale. La particella può attraversare la barriera per effetto tunnel. La Hamitoniana che descrive il processo assume la forma

$$\hat{H} = c(|s><d| + |d><s|)$$

dove c=costante e $|s>$ e $|d>$ sono i due possibili stati (supposti ortonormali) di occupazione della particella nella scatola. All'istante t=0 la particella si trova nello stato $|s>$, determinare la probabilità che si trovi in $|d>$ all'istante T

4) Trovare una stima variazionale dello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno utilizzando come funzione di prova una gaussiana.

5) Una particella di massa m è vincolata a muoversi su una circonferenza di lunghezza L. Determinare gli autostati normalizzati e i corrispondenti autovalori di energia. Determinare la correzione dell'energia dello stato fondamentale al primo ordine in presenza di una perturbazione della forma

$$V(x) = V_0\ cos^2(\frac{\pi x}{L})$$

22

Compito di istituzioni di Fisica Teorica

del 1-2-1994

1) Un nucleo in quiete di massa M=40 GeV decade in un e^- ($m_e = 0.5$ Mev) di impulso lungo la direzione $\hat{x}$ 0.2 MeV/c e un neutrino (m=0) di impulso 0.4 Mev/c. lungo la direzione $\hat{y}$ Determinare l'impulso del nucleo residuo nel riferimento in cui l'elettrone è in quiete.

2) In un sistema di riferimento siano dati tre eventi: l'evento O coincide con l'origine delle coordinate spazio-temporali, l'evento A di coordinate ($ct_A = 2, x_A = 4$) e l'evento B di coordinate ($ct_B = 2.5, x_B = 6$). Determinare, se esiste, un sistema o una classe di sistemi di riferimento in cui l'ordine temporale degli eventi sia opposto, ovvero: $ct'_B < ct'_A < ct'_O$.

3) Si consideri fascio non polarizzato di atomi con momento angolare totale $J = 1\ \hbar$. Ricavare dal valor medio m della proiezione del momento angolare J_z e dal suo scarto quadratico medio σ le probabilità di rivelare un atomo in ciascun autostato di J_z. A [illegible].

4) Considerare una particella di massa m nello stato $|n>$ di una buca di potenziale a pareti infinite di lunghezza L. Trovare la forza $F = -\frac{dE}{dL}$ esercitata sulle pareti della buca quando queste sono "leggermente" avvicinate di dL, assumendo che la particella rimanga nello stesso stato $|n>$ della buca. Considerare una particella classica di energia E_n nella stessa buca. Trovare la sua velocità, la frequenza di collisione su una parete data, l'impulso trasmesso per collisione e quindi la forza media. Confrontare questo risultato con il valore quantistico.

5) Sia data una particella sottoposta al seguente potenziale

$$V(x) = +\infty, \quad x < 0; \qquad V(x) = -V_0 \quad 0 \le x \le a; \qquad V(x) = 0 \quad x > a$$

Determinare gli stati legati della particella e le condizioni che permettono di ricavare i corrispondenti autovalori di energia.

23)

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica

del 27-5-1994

1) Un fascio di onde monocromatiche piane di campo elettrico

$$E_z = E_{0z}cos(\omega t - kx)$$

si propaga lungo l'asse x dell'osservatore O. Un osservatore O' si muove lungo l'asse x di O con velocità V costante. Determinare l'intensitá I del fascio misurata da O' rispetto all'intensità I_o misurata da O.

2) Uno sciame di muoni viene osservato in due riferimenti inerziali r ed r' in moto relativo uniforme con velocità relativa $\beta = 0.9$ nella direzione di propagazione dei muoni.In r ,a un dato istante, i muoni transitano ad una altezza h=4500 metri da una quota di riferimento con velocità $\beta = 0.995$ in avvicinamento alla quota detta. Allo stesso istante da questa quota transita il riferimento r'. Determinare il numero di muoni rivelati per unità di tempo e di superficie in r ed r' .

3) Dimostrare il teorema del viriale ($< T >=< V >$) per un sistema che si trova in un autostato della hamiltoniana di oscillatore armonico unidimensionale

4) Un fascio di atomi di momento angolare $L^2 = \overset{2}{\cancel{3}}\hbar^2$ viene sottoposto all'azione di un campo magnetico H uniforme, costante nel tempo. La direzione di quantizzazione di una componente del momento angolare (per es. L_z) è ortogonale a quella del campo magnetico (per es. Oy). Determinare: i)l'equazione di evoluzione nel tempo del valor medio di L_z ii)la probabilità di transizione dallo stato con autovalore massimo agli altri possibili autostati di L_z, in funzione del tempo $t > 0$.

5) La sezione d'urto di scattering di un'onda piana da un centro diffusore (infinitamente pesante) localizzato in $\vec{r}_o$ sia data da

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{k}_o \to \vec{k}) = |\frac{(2\pi)^2 m}{\hbar^2} < \vec{k}|T(\vec{r}_0)|\vec{k}_o > |^2$$

Come si modifica questa espressione se si introduce un secondo centro diffusore identico al primo localizzato in $\vec{r}_o + \vec{d}$?

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica

del 11-7-1994

24)

1) Una sorgente fissa nel riferimento O emette un fascio di luce avente frequenza ν_0.Il fascio,propagandosi lungo l'asse x positivo, incontra uno specchio da cui viene riflesso in senso opposto.Sapendo che lo specchio si allonta da O con velocità v_0 costante,determinare la frequenza ν del fascio riflesso misurata dal riferimento O.

2) Determinare la soglia del processo di creazione di coppia e^+e^- innescato dalla annichilazione di un fotone su un elettrone a riposo nel riferimento del laboratorio. Mostrare che il processo non è possibile in assenza dell'elettrone.

3) Sia $\psi(x)$ la funzione d'onda di una particella avente x_0 e p_0 come posizione media e impulso medio rispettivamente. Determinare la funzione d'onda della particella nel riferimento in cui impulso e posizione media sono nulli.

4) Un atomo di idrogeno viene posto in un campo elettrico diretto lungo l'asse x omogeneo in tutto lo spazio,ma dipendente dal tempo

$$E = 0 \qquad t \leq 0, \qquad E = E_0 \exp\left(-t/t_0\right) \qquad t > 0$$

All'istante t=0 l'atomo è nello stato fondamentale (1s). Determinare la probabilità all'ordine più basso della teoria perturbativa che dopo un tempo sufficientemente lungo l'atomo si trovi nello stato (2p) in cui la componente del momento angolare orbitale nella direzione del campo è nulla. Discutere come varia la probabilità di transizione al variare di t_0.

5) Un protone in moto lungo l'asse x incontra in x=0 una barriera repulsiva di intensità $V_0 = 8MeV$ che si estende uniformemente fino all'infinito. Determinare la posizione media del protone entro la barriera nei due casi in cui la sua energia è $E = 13MeV$ e $E = 3MeV$ (porre $\hbar^2/2m \sim 20MeV fm^2$).

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica

29-5-1995

1 Un oscillatore armonico unidimensionale si trova, al tempo t, in uno stato $|\psi>$ che è combinazione lineare dello stato fondamentale e del primo stato eccitato. Si sa che allo stesso istante di tempo i valori medi della posizione e dell'energia sono rispettvamente, 0 e $(3/4)\hbar\omega$. Qual'è la probabilità di trovare l'oscillatore, in seguito ad una misura dell'energia, nello stato fondamentale? I dati forniti dal problema sono sufficenti a determinare in maniera completa lo stato dell'oscillatore armonico?

2 Uno dei due elettroni dell'atomo di He nello stato fondamentale viene espulso in una collisione istantanea. Determinare la probabilità che il rimanente elettrone si trovi nello stato fondamentale dello ione He^+. (Trattare l'atomo di elio col metodo variazionale)

3 Una particella si trova nello stato fondamentale di un potenziale. armonico. Al tempo $t = 0$ il potenziale svanisce istantaneamente, determinare la funzione d'onda della particella per $t > 0$.

Suggerimento $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm ikx}\, e^{-(\alpha+i\beta)x^2} dx = (\frac{\pi}{\alpha + i\beta})^{1/2}\, e^{-\frac{k^2}{4(\alpha+i\beta)}}$$

4 Un osservatore O vede due segnali luminosi propagarsi rispettivamente lungo l'asse x e lungo l'asse y.Determinare il coseno dell'angolo formato dalle direzioni dei due segnali misurato nel riferimento O' che si muove rispetto ad O con velocità costante $\vec{v} = (v cos\alpha, v sin\alpha, 0)$.

5 Un nucleo in quiete si trova in un suo stato eccitato di energia M^*c^2.Ad un certo istante il nucleo decade nel suo stato fondamentale emettendo un fotone γ di energia E. Determinare l'energia E' di un altro fotone γ' affinchè questo, collidendo con un nucleo identico al precedente, in quiete e nel suo stato fondamentale, possa eccitarlo esattamente nello stato di energia M^*c^2.

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica

27-6-1995

1 Un oscillatore armonico unidimensionale nell'autostato $|n'>$ al tempo t=0 viene sottoposto ad una forza del tipo:

$$F = V_0 cos\omega_1 t e^{-\mu t}$$

. Determinare la probabilità che l'oscillatore armonico venga rivelato nel generico stato $|n>$. Discutere il risultato.

2 Un sistema di spin S viene sottoposto ad un campo magnetico uniforme e costante nella direzione z. Mostrare che S^2 e S_z sono costanti del moto. Mostrare inoltre che lo spin ha moto di precessione nel piano xy.

3 Si consideri l'hamiltoniana

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m} + 1/2m\omega(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2)$$

perturbata da un termine

$$V = \gamma(\hat{x}_1 + \hat{x}_2)$$

Determinare lo spettro di energia del sistema.

4 Un pione neutro di energia cinetica T=300 Mev nel laboratorio si disintegra in due fotoni. Nel riferimento del baricentro uno dei due fotoni viene emesso ad un angolo $\theta = \pi/3$ rispetto alla direzione del pione incidente. Determinare l'energia di ciascun fotone nel baricentro e nel laboratorio.

5 Una particella si muove in una direzione fissata del riferimento O con velocità c/2 e un fotone si muove nella stessa direzione e verso della particella. Determinare la posizione e l'istante in cui il fotone raggiunge la particella in un sistema di riferimento inerziale O' che si muove in direzione perpendicolare rispetto alla direzione di moto delle due particelle e con velocità $v_0 = \sqrt{3}/2c$. Al tempo t=0 la particella ed il fotone in O si trovano ad una distanza L.

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica

10-06-1996

1 Un mesone di vita media τ_0 viene creato all'istante t=0 con velocità $\beta = 0.22$. Dopo un tempo t_0 giunge una particella che viaggia nella stessa direzione del mesone. Qual'è la velocità minima che la particella deve avere per raggiungere il mesone prima che questo decada? Risolvere geometricamente il problema, discutendo i due casi $t_0 = 0.5\tau_0$ e $t_0 = 0.9\tau_0$.

2 Una sbarretta metallica di lunghezza l_0 trasla parallelamente all'asse y nella direzione dell'asse x con velocità costante v_0.Nella direzione dell'asse z è presente un campo magnetico costante che genera alle estremità della sbarretta una forza elettromotrice indotta dovuta alla forza di Lorentz sugli elettroni del metallo. Come si giustifica questa forza elettromotrice nel riferimento solidale con la sbarretta dove la velocità media degli elettroni è nulla?

2 Una particella si trova all'istante t=0 in uno dei due stati

$$|\psi_1(0)> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1> - |2>)$$

$$|\psi_2(0)> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1> + i|2>)$$

dove $|1>$ e $|2>$ sono lo stato fondamentale ed il primo stato eccitato di una buca di potenziale unidimensionale a pareti infinite. Determinare la posizione media della particella all'istante t nei due casi.

4 Determinare le simmetrie della hamiltoniana di una particella soggetta ad un potenziale della forma

$$\hat{V}(\vec{r}) = \hat{U}(r) + \alpha\hat{L}_y$$

e le rispettive costanti del moto.

5 Due particelle identiche si trovano in una buca di potenziale unidimensionale a pareti infinite. Determinare al primo ordine perturbativo di quanto cambia l'energia dello stato fondamentale delle due particelle quando queste vengono sottoposte ad una interazione di contatto,cioè della forma

$$V(x - x') = V_0\delta(x - x')$$

dove δ è la funzione δ di Dirac. Si risponda al quesito sia nel caso che le due particelle siano due bosoni che nel caso siano due fermioni.

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica

10-07-1996

1 Due astronavi viaggiano nella stessa direzione ed in verso opposto con velocità $v_1 = 0.6c$ e $v_2 = -0.8c$. Dalla prima astronave parte un segnale luminoso verso la seconda ed un osservatore posto sulla seconda astronave ne misura una frequenza $\nu' = 6\times 10^{14} Hz$. Determinare la frequenza del segnale nel riferimento della prima astronave.

2 Un fascio di particelle di massa m e velocità v si incrocia a 90^0 con un fascio costituito dalle corrispondenti antiparticelle aventi la stessa energia. Determinare il valore minimo della velocità perchè dalla collisione si generino coppie particella-antiparticella di massa 2m.

3 Un fascio di elettroni di impulso $\vec{p}$ investe uno schermo con due fenditure poste a distanza D l'una dall'altra. L'ampiezza di probabilità che un elettrone esca da una fenditura con impulso $\vec{p\prime}$ sia data da

$$< \vec{p}|A|\vec{p\prime} >$$

dove $\hat{A}$ è l'operatore di transizione. Determinare la distribuzione degli elettroni su uno schermo posto al di là delle fenditure.(Suggerimento: l'ampiezza di probabilità associata alla seconda fenditura si ottiene per traslazione rigida di $\hat{A}$.)

4 Un atomo di idrogeno immerso in un campo elettrico uniforme $\vec{E} = (0, 0, E_0)$ si trova in uno stato eccitato $|n, l, m >$ con n=2. Dimostrare che, nel sottospazio degli stati con n=2, per motivi di simmetria l'unico elemento di matrice non diagonale della Hamiltoniana che non si annulla è $W =< 2, 1, 0|\hat{H}|2, 0, 0 >$. Sempre nel sottospazio definito da n=2, diagonalizzare l'Hamiltoniana e discutere lo spettro di emissione.(Il calcolo esplicito di W non è richiesto).

5 I due elettroni di un atomo di elio subiscono una perturbazione della forma $V = -k(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2$. Trascurando la repulsione coulombiana tra i due elettroni determinare la correzione al primo ordine all'energia della stato fondamentale.

30

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica

3-10-1996

1 Un mesone π^+ viene generato ad $h_0 = 10Km$ di altezza sul livello del mare, con un'energia di E=4500 Mev ed è diretto verso la terra. A quale altezza h sul livello del mare avviene la sua disintegrazione? N.B. L'energia a riposo del mesone è E_0=140 Mev ed il suo tempo proprio di decadimento è $\tau = 2 \cdot 10^{-8} s$.

2 Due particelle sono emesse simultaneamente da due diverse sorgenti poste agli opposti estremi di un regolo rigido in quiete. Ciascuna delle particelle è rivelata successivamente all'estremità opposta di emissione. Nel riferimento solidale con la prima particella i tempi di percorrenza del regolo da parte delle due particelle risultano uguali. Qual'è la più veloce ? Determinare la velocità della seconda in funzione della velocità della prima e discutere il risultato.

3 Determinare usando il metodo variazionale l'energia dello stato fondamentale di un rotatore di hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{\hat{L}^2}{2I} - \omega \hat{L}_x$$

adoperando come funzione di prova

$$|\psi >= |10 > +\alpha|11 >$$

con α parametro variazionale.

4 Dato un operatore autoaggiunto $\hat{O}$, vale la cosiddetta regola di somma pesata sull'energia

$$\sum_n (E_n - E_0)| < n|\hat{O}|0 > |^2 = \frac{1}{2} < 0|[\hat{O}, [\hat{H}, \hat{O}]]|0 >$$

dove $|n >$ e E_n sono autostati ed autovalori dell'hamiltoniana $\hat{H}$ del sistema. Verificare che tale relazione vale per un oscillatore armonico con $\hat{O} = \lambda \hat{x}$.

ψ 5 Sia $\psi(x)$ la funzione d'onda dello stato fondamentale di un oscillatore armonico con valor medio dell'impulso nullo. Ricavare l'espressione della funzione d'onda dello stato fondamentale di un oscillatore armonico con valor medio dell'impulso $< \hat{p} >= p_0$ [Suggerimento: considerare la funzione d'onda nella rappresentazione degli impulsi]

riassegnato il 17-11-2010

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica

04-11-1996

31

1 La galassia *1* si allontana dalla nostra galassia con velocità β ; la galassia *2* si allontana dalla 1 con la stessa velocità β, e così di seguito la galassia n si allonatana dalla $n-1$ con la stessa velocità β, tutte nella stessa direzione e verso. Calcolare la velocità β_n della galassia n rispetto alla nostra e determinare il limite β_∞ per $n \to \infty$. (Suggerimento : determinare β_n in funzione di β_{n-1} e β).

2 In una regione dello spazio viene creato un campo elettromagnetico descritto dal quadripotenziale dipendente dal tempo

$$A^\mu = (0, \frac{\alpha ct}{r^3}\vec{r})$$

Calcolare i campi $\vec{E}$ e $\vec{H}$. Dire se esiste una trasformazione di gauge che rende il quadripotenziale del campo indipendente dal tempo e in caso affermativo determinarne la funzione generatrice.

3 Un sistema quantistico si trova a t=0 nello stato fondamentale della Hamiltoniana $\hat{H} = \hat{H}_o + \hat{V}$ data da

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & 2\epsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & V \\ V & 0 \end{pmatrix}$$

con $V = \sqrt{2}\epsilon$ e $\epsilon < 0$. All'istante t=0 la perturbazione viene rimossa. Calcolare all'istante $t > 0$ la probabilità che il sistema si trovi nell'autostato della Hamiltoniana con autovalore ϵ.

4 Un rotatore rigido carico viene sottoposto a un campo magnetico uniforme e costante per cui la Hamiltoniana assume la forma

$$\hat{H} = \frac{J^2}{2I} - \gamma\vec{B}\cdot\vec{J}$$

Determinare il valore minimo del campo per cui nello stato fondamentale $< \vec{J} > \neq 0$.

5 Sia dato un oscillatore armonico isotropo bidimensionale di Hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2)$$

determinare l'autostato con energia $E = 3\hbar\omega$ e momento angolare $L = 2\hbar$ nella rappresentazione delle coordinate. (Suggerimento : passare attraverso gli operatori $\hat{a}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x \pm i\hat{a}_y)$).

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica

7-2-1997

1 Un atomo di idrogeno decade dallo stato $2p$ allo stato fondamentale emettendo un fotone di energia E nel sistema di riferimento del laboratorio. Determinare l'energia di rinculo dell'atomo.

2 La direzione di propagazione di un fotone forma un angolo α con l'asse x di un sistema di riferimento. Determinare, se esiste, un riferimento inerziale in moto lungo l'asse x in cui il fotone è visto propagarsi lungo l'asse y. Come cambia il risultato se al posto di un fotone si considera una particella di massa finita e velocità v_0 ?

3 Determinare gli stati stazionari di un rotatore rigido che è vincolato a ruotare intorno all'asse z. Discutere il significato di eventuali degenerazioni di tali stati ed individuare l'osservabile che permette di rimuovere tali degenerazioni.

4 Determinare lo stato di un elettrone, sapendo che la misura di $\hat{S}_z$ darebbe $\hbar/2$ con probabilità $1/2$, mentre una misura di $\hat{S}_x$ darebbe $\hbar/2$ con probabilità $3/4$. Determinare inoltre il valore di aspettazione di $\hat{S}_y$.

5 Sia dato un sistema quantistico di Hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)$$

Dimostrare che

$$< m|\hat{p}|n >= i\ m\ \omega_{mn} < m|\hat{x}|n >$$

dove $\omega_{mn} = \frac{E_m - E_n}{\hbar}$, $|i>$ e E_i sono autostati e autovalori di $\hat{H}$.

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica

7-3-1997

33

1 Un osservatore solidale ad un riferimento inerziale vede due segnali luminosi non simultanei dipartirsi dalle estremità di un regolo in quiete di lunghezza L ai tempi t_1 e t_2 rispettivamente. Determinare l'intervallo temporale tra l'emissione dei due segnali misurato da un secondo osservatore in moto rispetto al primo lungo la direzione del regolo con velocità β. Come cambia il risultato se la velocità del secondo osservatore è ortogonale al regolo?

2 Due particelle di ugual massa a riposo sono proiettile e bersaglio di un urto totalmente anelastico. Se, dopo l'urto, la velocità della particella composta è 2/3 della velocità del proiettile, determinare 1) la velocità del proiettile, 2) il rapporto tra la massa a riposo della particella composta e del proiettile.

3 Una particella si trova su un segmento di lunghezza a. Si calcoli il valor medio e lo scarto quadratico medio della sua posizione (nello stato stazionario n-esimo) ~~e le corrispondenti~~ medie temporali classiche. Si confrontino tali risultati alla luce del limite classico.

4 Si consideri una particella di spin $s = 1/2\hbar$ immersa in un campo magnetico $\vec{B}$ di modulo B_0 e direzione identificata dagli angoli θ_0 e ϕ_0. Trovare autostati e autovalori della particella nella base degli autostati di $\hat{s}_z$.

5 Un oscillatore armonico isotropo bidimensionale si trova nello stato di energia $2\hbar\omega$. Determinare la correzione al primo ordine perturbativo dovuta ad un potenziale della forma $\hat{V} = \lambda(\hat{x}\hat{y} + \hat{y}\hat{x})$, con $\lambda^2 << \lambda$.

×

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica
9-6-1997

34

1 Una particella di massa m e velocità v si disintegra in volo emettendo due fotoni. Sapendo che nel riferimento del laboratorio uno dei due fotoni è visto propagarsi in direzione ortogonale alla direzione del moto della particella, determinare la direzione di propagazione del secondo fotone.

2 Una particella di carica q si muove con velocità costante v nel riferimento O. Applicando le trasformazioni di Lorentz determinare il campo elettrico ed il campo magnetico generato dalla particella.

3 Un oscillatore armonico unidimensionale nel suo stato fondamentale è sottoposto al tempo $t = 0$ ad una debole forza costante agente per un tempo T. Per quali stati eccitati la probabilità di transizione al primo ordine perturbaivo è diversa da zero? Per quale valore di T questa probabilità è massima?

4 Sia dato un oscillatore armonico bidimensionale isotropo con autostati $|n_x, n_y>$. Trovare autostati e autovalori dell'operatore $\hat{L}_z$ nel sottospazio degli autostati degeneri di energia $\frac{3}{2}\hbar\omega$.

5 Una molecola biatomica rigida con momento di inerzia I (rotatore libero) e con momento di dipolo elettrico permanente $\vec{d}$ si trova nello stato rotazionale fondamentale (L=0). Determinare al primo ordine perturbativo la correzione allo stato per effetto dell'applicazione di un campo elettrico debole $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$.

35

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica

3-10-1997

1 La misura dello spin di un elettrone lungo l'asse x dà come risultato $\hbar/2$. *i)* Si determini la probabilità che la misura di $\hat{S}_z$ dia come risultato $-\hbar/2$. *ii)* Si calcoli l'evoluzione di questo stato in presenza di un campo magnetico uniforme e costante diretto lungo l'asse z.

18 dicembre 2012

2 Un oscillatore armonico di frequenza ω è descritto all'istante $t = 0$ da uno stato che è combinazione lineare dello stato fondamentale e del primo stato eccitato ed evolve secondo l'hamiltoniana imperturbata. Il valor medio dell'operatore coordinata $\hat{x}$ varia nel tempo secondo la legge $x(t) = x_0\ cos(\omega t + \alpha)$. Determinare in maniera completa lo stato dell'oscillatore.

3 Una particella di spin $\frac{1}{2}$ è perturbata da un campo magnetico oscillante di intensità $B = B_0 \cos(\omega t)$ diretto lungo l'asse z. Determinare esattamente l'evoluzione temporale di un generico stato iniziale. Calcolare la probabilità di transizione da uno all'altro dei due autostati di $\hat{S}_x$. Confrontare tale risultato esatto con l'analogo calcolo perturbativo al primo ordine, e discutere la validità di quest'ultimo.

4 Una particella di massa m e carica q si muove, nel campo elettromagnetico definito dal potenziale $A^\mu \equiv (A^0, \vec{A})$, dal punto $\vec{r}_1$ occupato al tempo t_1 al punto $\vec{r}_2$ raggiunto al tempo t_2. Dire se la trasformazione

$$A^0 \to A^0 + \frac{\omega}{c} \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right)$$

$$\vec{A} \to \vec{A} + \vec{k} \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right)$$

definisce una trasformazione di gauge ammissibile per qualunque valore dei parametri ω, $\vec{k}$. Determinare la variazione dell'azione tra t_1 e t_2 conseguente alla trasformazione.

5 Un fotone incide su uno specchio con angolo $\theta = \pi/3$ nel riferimento solidale con lo specchio. Calcolare il rapporto tra la frequenza del fotone riflesso e quella del fotone incidente, misurate da un osservatore in moto con velocità $v = c/2$ perpendicolare allo specchio.

36

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica

9-12-1997

1 Un atomo di idrogeno si trova in un autostato dell'Hamiltoniana con energia $E = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}$ ed $n = 2$. Sapendo che la misura di L_z dà $\hbar$ con probabilità $1/4$ e $-\hbar$ con probabilità $1/2$, e che la misura di L^2 dà $2\hbar^2$ con probabilità $3/4$, determinare il valore medio di L_y ed L_x.

riassegnata 11/06/2

2 Una particella descritta (in un sistema unidimensionale) al tempo $t = 0$ dalla seguente funzione d'onda

$$\psi(x,0) = N \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|k|}{k_0}} e^{ikx} dk,$$

dove k_0 e N sono costanti, è lasciata libera di evolvere.

1) Qual'è la probabilità $P(p_1, 0)$ che una misura dell'impulso, fatta al tempo $t = 0$, generi un risultato tra $-p_1$ e p_1?

2) Cosa accade a questa probabilità $P(p_1, t)$ se la misura viene effettuata al tempo t?

3 Siano date due particelle 1 e 2 di spin $\frac{\hbar}{2}$ la cui hamiltoniana è $\hat{H} = \gamma \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2$. Calcolare autovalori e autostati del sistema.

4 Una particella di massa propria m_1 ed energia E_1 urta una particella ferma di massa propria m_2; nell'urto le particelle si fondono in una particella di massa propria m_3. Si determini m_3 e se m_3 sia maggiore, minore od uguale a $m_1 + m_2$. Si usi quest'ultimo risultato per stabilire se questo processo può descrivere un effetto di "tipo fotoelettrico" nel quale un fotone (particella 1) viene assorbito da un elettrone libero (particelle 2 e 3).

5 Un oggetto A si muove con velocità β diretta lungo l'asse y' rispetto al riferimento O', che a sua volta si muove con velocità β diretta lungo l'asse x rispetto al riferimento O. Viceversa un oggetto B si muove con velocità β diretta lungo l'asse x'' rispetto al riferimento O'', che a sua volta si muove con velocità β diretta lungo l'asse y rispetto al riferimento O. Determinare nel riferimento O l'angolo formato dalle velocità di A e di B.

37

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica

06-04-1998

1) Un osservatore solidale con il riferimento O rileva la presenza di un campo elettromagnetico uniforme e costante con $|\vec{E}| = |\vec{H}|$, e con l'angolo θ formato dai vettori $\vec{E}$ ed $\vec{H}$ uguale a $\pi/4$. Dire se esiste un riferimento inerziale O' in cui:
   i) l'angolo θ' tra i due vettori risulti maggiore o minore di θ;
   ii) $\theta' = \frac{\pi}{2}$;
   iii) $|\vec{E}'| = 2|\vec{H}'|$;
   iv) $|\vec{E}'|$ risulti maggiore o minore di $|\vec{E}|$;
   v) $|\vec{E}'| = \frac{1}{2}|\vec{E}|$.
   Motivare le risposte.
2) Una lampadina in quiete rispetto all'osservatore O si accende all'istante t_0 e si spegne dopo un intervallo di tempo Δt. Un osservatore O' si muove di moto rettilineo uniforme rispetto ad O con velocità v ed in direzione della lampadina. Per quanto tempo O' "vede" accesa la lampadina?

esercitazione marzo 2012

3) Sia dato un rotatore rigido vincolato a ruotare intorno all'asse z, descritto dalla funzione d'onda:
$$\psi(\phi) = A(\cos\phi - \cos 2\phi + 2\cos 3\phi)$$
   Calcolare:
   a) I possibili valori che si ottengono dalla misura di $\hat{L}_z$ e la rispettiva probabilità;
   b) Il valore medio dell'operatore $\hat{L}_z$.
4) Si considerino due oscillatori armonici di massa m e frequenza ω. Si calcoli la correzione al primo ordine perturbativo dell'energia dello stato fondamentale se i due oscillatori interagiscono con un potenziale del tipo
$$\hat{V} = V_0|\hat{x}_1 - \hat{x}_2|$$
5) Un atomo di idrogeno è sottoposto alla perturbazione di un campo elettromagnetico di frequenza $\omega = \Delta E/\hbar$, ed ampiezza variabile nel tempo $A(t)$. Sapendo che ΔE coincide esattamente con l'energia di eccitazione al primo stato eccitato, determinare il rapporto tra le probabilità di eccitazione rispettivamente nel caso di una ampiezza
$$A(t) = A_0 e^{-\alpha t} \qquad (\alpha > 0)$$
   che agisce per un tempo infinito, e nel caso di una ampiezza costante $A(t) = A_0$ che agisce per un tempo finito T.

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica

17-6-1998

1) Determinare l'energia minima del fotone γ affinchè sia possibile il processo di ionizzazione

$$\gamma + H \rightarrow p + e^-$$

tenendo conto della relazione tra la massa dell' atomo di H e quelle del protone e dell' elettrone.

2) Un fascio di particelle con $S = 1/2$ è polarizzato nell'autostato di $\hat{S}_z$ con $S_z = +1/2$. Il fascio attraversa un apparato di Stern-Gerlach con il campo magnetico orientato nel piano xz. Determinare le possibili direzioni del campo sapendo che fuoriescono due fasci di cui uno ha intensità tripla rispetto all'altro.

* 3) Determinare lo spettro dell'oscillatore armonico tridimensionale di hamiltoniana

dato il
17-11-2010

$$H = \frac{(\vec{p})^2}{2m} + \frac{1}{2}m(\alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2 + \beta^2 z^2)$$

Dire quali sono le grandezze conservate nel caso $\alpha \neq \beta$ e calcolarne esplicitamente il commutatore con l'hamiltoniana.

dato
11/06/12

4) Determinare spettro energetico e raggio quadratico medio del positronio, cioè di un elettrone e un positrone legati dall'interazione Coulombiana.

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica

16-9-1998

1) Nel riferimento del laboratorio una particella di massa M decade in volo emettendo due fotoni che in tale riferimento hanno la stessa identica energia e si dirigono lungo rette mutuamente ortogonali. Determinare la velocità iniziale della particella.

fatto in eserc. 1023. il 22/03/12

2) Un rotatore rigido si trova al tempo $t = 0$ nello stato descritto dalla funzione d'onda:

$$\Psi = N \sum_{l=1}^{3} (1 + l) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

con $m = 1$. Determinare la probabilità che a $t = 0$ una misura di $\hat{L}^2$ dia un valore compreso tra 0 e $10\hbar^2$. Come varia il risultato al variare di t se il rotatore è completamente libero di ruotare ?

fatto in eserc. Taz. 22/03/12

3) Una particella di massa m è soggetta al potenziale

$$V(\vec{r}) = \beta y^2 + \beta z^2 = \beta(y^2 + z^2)$$

dove $\vec{r} \equiv (x, y, z)$ è il vettore posizione. Determinare le grandezze conservate e calcolarne esplicitamente il commutatore con l'Hamiltoniana.

riassegnato 27/06/11

4) Sia $\hat{A}$ il generatore di una trasformazione di simmetria che lascia l'hamiltoniana $\hat{H}$ invariata. Denotando con $|a\rangle$ un set completo di autostati di $\hat{A}$,

$$\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle$$

si dimostri che

$$\langle a|\hat{H}|a'\rangle = const. \cdot \delta_{aa'}.$$

(Si noti che in generale gli autostati di $\hat{A}$ non necessariamente sono autostati di $\hat{H}$)

4D

Compito di Istituzioni di Fisica Teorica

9-12-1998

1) Un raggio luminoso monocromatico di frequeza ω è diffuso da un fascio di elettroni che si muovono nella stessa direzione ed in verso opposto. Determinare la velocità degli elettroni imponendo che la luce diffusa all'indietro ha la stessa frequenza ω.

2) Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale sottoposto ad una perturbazione della forma $E\hat{x}$. Si dimostri che il quadrato dello scarto quadratico medio della coordinata $\hat{x}$ nello stato fondamentale imperturbato è proporzionale alla correzione al secondo ordine perturbativo dell'energia dello stesso stato.

3) Una particella di spin $\frac{1}{2}\hbar$ è sottoposta ad un potenziale centrale della forma di un oscillatore armonico tridimensionale isotropo. Calcolare la separazione tra i livelli energetici $2p_{3/2}$ e $2p_{1/2}$ dovuta alla interazione spin-orbita

$$V_{so} = \frac{1}{2m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{dV(r)}{dr}\hat{\mathbf{l}}\cdot\hat{\mathbf{s}}$$

Ricordiamo che con la notazione $2p_{3/2}$ e $2p_{1/2}$ si intendono due stati con momento angolare orbitale $l = 1\hbar$ e momento angolare totale rispettivamente $j = 3/2\hbar$ e $j = 1/2\hbar$.

Suggerimento: per lo svolgimento del problema considerare $\hat{\mathbf{j}}^2 = (\hat{\mathbf{l}} + \hat{\mathbf{s}})^2$.

4) Un fascio di atomi di argento di impulso p_0 attraversa un apparato di Stern-Gerlach di spessore $\Delta x = L$, dove è presente un campo magnetico disomogeneo nella direzione z della forma $B_z = B_0 + B_1 z$. Assumendo che gli atomi vengano preparati nello stato di momento angolare $|\frac{1}{2}\frac{1}{2}>$ si determini, al limite semiclassico, l'angolo di deflessione del fascio.