DALL'EFFETTO DOPPLER ALL'INVARIANZA DI GAUGE

Una introduzione non convenzionale alle simmetrie interne delle teorie fisiche

Fabio Siringo

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Università degli studi di Catania - A.A. 2000/2001

1. Introduzione

L'invarianza per trasformazioni di gauge ha un ruolo importante nella teoria delle interazioni fondamentali. Le trasformazioni di gauge sono generalmente incontrate dagli studenti durante lo studio delle proprietà del campo elettromagnetico classico. Tuttavia non si tratta di trasformazioni limitate al potenziale vettore del campo elettromagnetico, ma di trasformazioni di simmetria interne della teoria, che riguardano le funzioni d'onda di tutte le particelle.

Per sottolineare questo aspetto, la simmetria di gauge è introdotta in queste note a partire dalla descrizione generale delle simmetrie per una generica particella, senza alcun riferimento alle equazioni di Maxwell ed al campo elettro-magnetico. In particolare si vedrà che, connettendo l'invarianza per trasformazioni di Lorentz con le regole fondamentali della meccanica quantistica, l'invarianza per trasformazioni di gauge risulta necessaria per la descrizione di bosoni a massa nulla (fotoni, gravitoni, ecc.). In altri termini la simmetria di gauge è una diretta conseguenza della inclusione del pricipio di relatività nella meccanica quantistica.

L'analisi parte dallo studio delle leggi di trasformazione per una particella di massa nulla (trasformazioni di Lorentz). Come è noto in questo caso le leggi di trasformazione di energia e impulso coincidono con quelle dell'effetto Doppler. Emerge l'esistenza di trasformazioni non banali che lasciano invariate le proprietà di una particella. Tali trasformazioni, in presenza di quantizzazione del momento angolare, implicano l'invarianza di gauge della teoria. Infine, per qualunque particella interagente con il bosone a massa nulla, l'invarianza di gauge comporta l'esistenza di una simmetria interna della funzione d'onda (invarianza locale).

I requisiti minimi richiesti per la lettura di queste note sono: (1) la conoscenza della relatività ristretta e la padronanza del formalismo qudri-vettoriale nello spazio-tempo; (2) la conoscenza delle leggi fondamentali della meccanica quantistica non-relativistica.

Queste note possono essere viste o come un approfondimento degli argomenti trattati nel corso di Istituzioni di Fisica Teorica (per gli studenti che preparano la materia), o come una introduzione alle materie teoriche successive (per gli studenti che iniziano il quarto anno).

2. Effetto Doppler

2.1 Un semplice problema

Si consideri il seguente problema:

La direzione di propagazione di un fotone di frequenza ω forma un angolo α con l'asse z di un riferimento inerziale O. Determinare il riferimento inerziale O', in moto lungo l'asse z, in cui la frequenza $\omega' = \omega$. Determinare il nuovo angolo di propagazione α' nel riferimento O'.

La soluzione è molto semplice. L'energia $E = \hbar\omega$ e l'impulso $|\vec{p}| = E/c$ del fotone costituiscono le componenti di un quadrivettore energia-impulso. In un generico riferimento O'

$$E'/c = \gamma(E/c - \beta p_z) \tag{2.1.1}$$

ovvero

$$\omega'/\omega = \gamma(1 - \beta\cos\alpha). \tag{2.1.2}$$

Imponendo che $\omega = \omega'$ otteniamo, risolvendo in β e ricordando che $\gamma^2 = (1-\beta^2)^{-1}$, la velocità di O'

$$\beta = \frac{2\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha} \tag{2.1.3}$$

Per determinare il nuovo angolo conviene utilzzare un metodo geometrico. Senza ledere la generalità possiamo scegliere l'asse x in modo che il fotone si propaghi nel piano xz. Il vettore impulso $\vec{p}$ avrà solo le componenti p_x e p_z diverse da zero, sia in O che in O' (la velocità β è diretta lungo l'asse z, dunque p_y e p_x non variano nella trasformazione). Nel riferimento O' il quadri-vettore energia-impulso ha componenti $p'_x = p_x$, $p'_y = p_y = 0$ e $E' = E$. Quest'ultima relazione per l'energia deriva semplicemente dalla condizione $\omega = \omega'$ che abbiamo imposto. Per una particella di massa $m = 0$ (tutta questa discussione vale per qualunque particella di massa nulla, non necessariamente per un fotone) l'energia determina il modulo dell'impulso $|\vec{p}| = E/c$, dunque il modulo dell'impulso non cambia nella trasformazione da O ad O'. Consideriamo ora nel piano $p_x - p_z$ il cerchio $p_x^2 + p_z^2 = |\vec{p}|^2 = E^2/c^2$. Sia il nuovo che il vecchio vettore impulso devono trovarsi sul cerchio. Inoltre, poichè p_x non cambia, sia il nuovo che il vecchio impulso sono determinati dalle intersezioni tra il cerchio e la retta $p_x = (E/c)\sin\alpha$. Il lettore potrà facilmente rendersi conto (per esempio con una costruzione grafica) che esistono due intersezioni in corrispondenza degli angoli α e $\pi - \alpha$. La prima soluzione è il vettore iniziale. La seconda soluzione rappresenta il vettore trasformato in O', dunque $\alpha' = \pi - \alpha$.

2.2 Una trasformazione di simmetria

Il risultato del paragrafo precedente comporta l'esistenza di una trasformazione di simmetria per le particelle di massa nulla. Abbiamo infatti determinato una trasformazione di Lorentz non banale (nel senso che si tratta proprio di una trasformazione tra due riferimenti inerziali in moto relativo con velocità β non nulla) che lascia invariati il modulo dell'impulso e l'energia, ma ruota la direzione di propagazione di un angolo $\pi-2\alpha$. Una successiva rotazione di $\pi-2\alpha$ intorno all'asse y riporta il quadri-vettore energia-impulso al suo valore iniziale. La combinazione delle due trasformazioni lascia invariato il quadri-vettore energia-impulso. Il "nuovo" fotone è quindi indistinguibile dal "vecchio". Naturalmente nella trasformazione gli impulsi e le energie di tutte le altre particelle cambiano.

Vogliamo inizialmente determinare la matrice che descrive la trasformazione discussa nel paragrafo precedente nel caso in cui la particella di massa nulla si propaga lungo l'asse z del riferimento O con energia E. In questo caso conviene prima ruotare gli assi intorno all'asse y di un angolo α arbitrario, in modo da portare la direzione di propagazione nel piano xz come nel precedente paragrafo. A quel punto le condizioni iniziali sono identiche a quelle del problema precedente, ed il risultato (2.1.3) determina la velocità del riferimento O' in cui la particella ha energia invariata. Occorre infine rimettere gli assi a posto con una rotazione intorno all'asse y di un angolo $-\alpha$. Il risultato dipenderà ovviamente dall'angolo α che è arbitrario (avremo cioè un insieme continuo di trasformazioni ad un parametro).

Denotiamo con $\Lambda_z(\beta)$ la matrice di trasformazione dei quadri-vettori nel passare dal riferimento inerziale O al riferimento O' che si muove con velocità β lungo l'asse z di O. Denotiamo inoltre con $R_y(\alpha)$ la matrice di trasformazione del quadri-vettore per una rotazione intorno all'asse y di un angolo α. La matrice di trasformazione $\Lambda_\alpha(\beta)$ che lascia invariata l'energia della particella si ottiene dunque dal prodotto

$$\Lambda_\alpha(\beta) = R_y(-\alpha)\Lambda_z(\beta)R_y(\alpha) \tag{2.2.1}$$

Scriviamo esplicitamente le matrici che agiscono sulle componenti controvarianti dei quadri-vettori:

$$R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{2.2.2}$$

$$\Lambda_z(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \tag{2.2.3}$$

La matrice $\Lambda_\alpha(\beta)$ si ottiene moltiplicando le matrici come indicato nella (2.2.1):

$$\Lambda_\alpha(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta\sin\alpha & 0 & -\gamma\beta\cos\alpha \\ -\gamma\beta\sin\alpha & \cos^2\alpha+\gamma\sin^2\alpha & 0 & \sin\alpha\cos\alpha(\gamma-1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta\cos\alpha & \sin\alpha\cos\alpha(\gamma-1) & 0 & \gamma\cos^2\alpha+\sin^2\alpha \end{pmatrix}. \tag{2.2.4}$$

Il lettore potrà verificare che, applicando la matrice $\Lambda_\alpha(\beta)$ al quadri-vettore $(E/c, 0, 0, E/c)$, che rappresenta appunto una particella di massa nulla che si propaga nella direzione z

$$\Lambda_\alpha(\beta)\begin{pmatrix} E/c \\ 0 \\ 0 \\ E/c \end{pmatrix} = \frac{E}{c}\begin{pmatrix} \gamma(1-\beta\cos\alpha) \\ \gamma\sin\alpha(\cos\alpha-\beta)-\sin\alpha\cos\alpha \\ 0 \\ \gamma\cos\alpha(\cos\alpha-\beta)+\sin^2\alpha \end{pmatrix}, \tag{2.2.5}$$

e sostituendo l'equazione (2.1.3)

$$\beta = \frac{2\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha} \tag{2.1.3}$$

e le equazioni derivate

$$\gamma = \frac{1+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} \tag{2.2.5}$$

$$\gamma\beta = \frac{2\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \tag{2.2.6}$$

si ottiene il vettore

$$(E/c)(1,\ -2\sin\alpha\cos\alpha,\ 0,\ \sin^2\alpha-\cos^2\alpha)$$

che può essere scritto come

$$(E/c,\ \sin(2\alpha-\pi)E/c,\ 0,\ \cos(2\alpha-\pi)E/c) \tag{2.2.7}$$

e rappresenta una particella che si propaga con impulso ruotato di un angolo $2\alpha-\pi$, ma con la stessa identica energia E.

Per costruire la trasformazione di simmetria occorre far seguire alla trasformazione $\Lambda_\alpha(\beta)$ una rotazione che rimetta il vettore impulso lungo la direzione z. Denotando con Γ_α la matrice che descrive la trasformazione complessiva abbiamo

$$\Gamma_\alpha = R_y(2\alpha-\pi)\Lambda_\alpha(\beta). \tag{2.2.8}$$

Ricordando la regola di composizione delle rotazioni

$$R_y(2\alpha-\pi)R_y(-\alpha) = R_y(\alpha-\pi) \tag{2.2.9}$$

e la definizione (2.2.1) di $\Lambda_\alpha(\beta)$, ricaviamo

$$\Gamma_\alpha = R_y(\alpha-\pi)\Lambda_z(\beta)R_y(\alpha). \tag{2.2.10}$$

I prodotti indicati possono essere facilmente operati, e sostituendo le espressioni (2.1.3), (2.2.5), (2.2.6) che fissano β e γ in funzione dell'angolo α, nonchè utilizzando le relazioni trigonometriche $\cos(\alpha-\pi) = -\cos\alpha$, $\sin(\alpha-\pi) = -\sin\alpha$, $\sin^4\alpha - \cos^2\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha$, otteniamo

$$\Gamma_\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}\begin{pmatrix} 1+\cos^2\alpha & -\sin(2\alpha) & 0 & -2\cos^2\alpha \\ -\sin(2\alpha) & \sin^2\alpha & 0 & \sin(2\alpha) \\ 0 & 0 & \sin^2\alpha & 0 \\ 2\cos^2\alpha & -\sin(2\alpha) & 0 & \sin^2\alpha-2\cos^2\alpha \end{pmatrix}. \tag{2.2.11}$$

Si può facilmente verificare che la nuova matrice Γ_α lascia effettivamente invariato il vettore $(E/c, 0, 0, E/c)$ per qualunque valore di α. La matrice Γ_α descrive un insieme (continuo ad un parametro) di trasformazioni di simmetria per una particella di massa nulla che si muove nella direzione z. È importante rilevare che una tale trasformazione di simmetria può esistere solo per particelle di massa nulla. Più precisamente si tratta di un sottoinsieme del *little group* di Wigner che comprende tutte le trasformazioni di simmetria che lasciano invariato il quadri-vettore $(1, 0, 0, 1)$. La matrice Γ_α rappresenta solo un caso particolare, poichè analoghe trasformazioni di simmetria possono essere costruite sostituendo nella (2.2.10) e nella (2.2.1) la trasformazione di Lorentz $\Lambda_z(\beta)$ con una opportuna trasformazione $\Lambda_x(\beta')$ lungo l'asse x. Inoltre il gruppo comprende anche le rotazioni intorno all'asse z che ovviamente lasciano invariate le grandezze fisiche che caratterizzano una particella che si muove lungo l'asse z.

Chiaramente il significato della trasformazione Γ_α è piuttosto oscuro. Risulta essere qualcosa di caratteristico delle particelle di massa nulla e, come vedremo, riguarda l'invarianza di gauge della teoria di campo che descrive la particella. L'esistenza di questa trasformazione di simmetria non dipende dalle equazioni di campo specifiche che descrivono la particella, ma è una conseguenza diretta delle trasformazioni di Lorentz.

3. Aspetti quantistici

3.1 Simmetrie della funzione d'onda

Le autofunzioni simultanee degli operatori H (Hamiltoniana) e $\vec{P}$ (impulso) sono le onde piane

$$\Psi(x) = e^{ik\cdot x} = e^{i(\vec{k}\vec{x}-Et)} \tag{3.1.1}$$

dove $x \equiv (ct, \vec{x})$ è la coordinata quadri-dimensionale della particella, $k \equiv (E, \vec{k})$ è il quadrivettore energia-impulso e per comodità facciamo uso di unità di misura *naturali* tali da porre $\hbar = c = 1$. Nella (3.1.1) k è l'autovalore dell'operatore $P \equiv (H, \vec{P})$. Il quadrato dell'autovalore è ciò che definiamo massa della particella:

$$m^2 = k^2 = k^\mu k_\mu = E^2 - \vec{k}^2 \tag{3.1.2}$$

Ci chiediamo se possano esistere altre grandezze conservate per una particella libera. In Meccanica Quantistica le grandezze conservate sono associate ad operatori che commutano con l'Hamiltoniana, e sono quindi i generatori di trasformazioni di simmetria. Dobbiamo quindi prendere in esame le simmetrie del problema. Queste simmetrie sono diverse per particelle con massa nulla e particelle con massa diversa da zero. Distinguiamo quindi i due casi:

Se $m \neq 0$, esiste sicuramente un riferimento inerziale solidale con la particella, in cui l'impulso $\vec{k}$ della particella è nullo. Lavorando in questo riferimento abbiamo $k = (m, 0, 0, 0)$ (particella di massa m a riposo). Il sistema è chiaramente invariante per rotazioni. Gli operatori momento angolare totale J_x, J_y e J_z commutano con H, ed è possibile trovare autostati simultanei di H, J^2 e J_z. La particella può dunque avere un momento angolare intrinseco $\vec{J} = \vec{S}$ (spin) che agisce da generatore delle rotazioni: la funzione d'onda avrà $(2s + 1)$ componenti (spinore) e la generica rotazione di un angolo θ intorno all'asse i-esimo è descritta da un operatore unitario di rotazione $U_i(\theta)$ che agisce sulla funzione d'onda come una matrice $(2s + 1) \times (2s + 1)$. Come è noto

$$U_i(\theta) = e^{-i\theta S_i} \tag{3.1.3}$$

e la conoscenza degli elementi di matrice di S_i consente di determinare la matrice unitaria di trasformazione. Una generica particella di massa $m \neq 0$ sarà quindi caratterizzata da $(2s + 1)$ possibili proiezioni del suo momento angolare intrinseco. In sostanza non ci sono novità rispetto al caso non relativistico.

Se $m = 0$ invece una sostanziale differenza con il caso non relativistico deriva dalla inesistenza di un riferimento inerziale in cui la particella è a riposo. La particella è costretta a muoversi alla velocità della luce in ogni riferimento inerziale. La presenza di una direzione privilegiata (la direzione del moto) rompe la simmetria rotazionale. Il problema assume una simmetria cilindrica con invarianza limitata alle sole rotazioni intorno alla direzione del moto. Dunque J^2 non commuta con H, e l'unica grandezza conservata è la proiezione del momento angolare lungo la direzione del moto (elicità). Per fissare le idee assumiamo che la direzione del moto sia lungo l'asse z come nel capitolo precedente. L'impulso avrà allora la forma $k = (E, 0, 0, E)$. Questo vettore è invariante per rotazioni intorno all'asse z generate dall'operatore J_z. La particella potrà avere valori definiti della proiezione $J_z = S_z$ del momento angolare intrinseco, cioè della elicità. Come è noto gli autovalori di J_z possono assumere valori interi o semi-interi per cui l'elicità assume i valori

$$s_z = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \dots \tag{3.1.4}$$

È importante comprendere che non esiste alcuna ragione per cui particelle con diversi valori di elicità non debbano essere considerate come particelle diverse. Infatti non esiste alcuna trasformazione di simmetria che fa cambiare l'elicità della particella. Per una particella di massa m la conservazione di J^2 implica l'esistenza di rotazioni (diverse da quelle generate da J_z) che sono trasformazioni di simmetria: queste rotazioni inevitabilmente mescolano tra di loro gli stati con valori differenti di s_z. Ad esempio una rotazione intorno all'asse x è una trasformazione di simmetria per una particella a riposo. Se lo stato iniziale è un autostato di S_z, dopo la rotazione la funzione d'onda sarà una sovrapposizione di autostati appartenenti ad autovalori differenti di S_z. La legge di trasformazione è la matrice unitaria (3.1.3) per $i = x$. Tuttavia, la rotazione non può trasformare la particella in una sovrapposizione di altre particelle, ed è inevitabile che le diverse proiezioni debbano essere considerate come possibili autovalori della stessa particella. La funzione d'onda della particella assume dunque una forma spinoriale a $(2s + 1)$ componenti. Per una particella di massa nulla ciò non accade perchè l'unico generatore delle rotazioni conservato rappresenta l'elicità, e se non esistono trasformazioni di simmetria che mescolano tra loro gli stati ad elicità diversa, questi stati rappresentano enti fisici differenti. Possiamo quindi attribuire un diverso nome a particelle cartterizzate da diversa elicità.

La situazione cambia in presenza di simmetrie aggiuntive: quasi tutte (ma non tutte) le interazioni fondamentali sono simmetriche per inversione degli assi. Escludendo le interazioni che non conservano la parità, l'inversione degli assi deve essere considerata una trasformazione di simmetria del sistema. L'inversione degli assi causa una inversione della elicità (il momento angolare si comporta come uno pseudo-vettore), e quindi trasforma una particella con elicità positiva in una con elicità negativa e viceversa. Per questo motivo gli stati con elicità opposta sono generalmente considerati come stati fisici differenti della stessa particella.

In definitiva l'elicità di una particella con massa nulla può assumere il valore $\pm\sigma$ con $\sigma = 0$, $\sigma = 1/2$ (neutrino), $\sigma = 1$ (fotone), $\sigma = 2$ (gravitone), ecc. ecc.

La rotazione di un angolo θ intorno alla direzione del moto è descritta al solito da un operatore unitario $U(\theta)$ che agisce sulla funzione d'onda, ed è determinato dal generatore. Poichè il generatore è ovviamente diagonale nella base dei suoi autostati, anche l'operatore $U(\theta)$ è diagonale ed assume la forma

$$U(\theta) = e^{\pm i\sigma\theta} \tag{3.1.5}$$

Si riduce quindi ad una semplice costante moltiplicativa che produce solo uno sfasamento della funzione d'onda in seguito alla rotazione nello spazio.

3.2 Esempio: il fotone (σ=1)

Una particella di spin $s = 1$ è generalmente descritta da un campo vettoriale, cioè da una funzione d'onda a più componenti che si trasforma come un quadri-vettore per trasformazioni di Lorentz. Ipotizziamo dunque che anche il fotone sia descritto da un campo vettoriale $A^\mu(x)$. Tuttavia nel caso del fotone, particella a massa nulla, le quattro componenti del vettore sono eccessive: ci aspettiamo che due siano sufficienti per descrivere una particella con elicità $\sigma = \pm 1$. Vediamo come ciò emerga in maniera naturale come applicazione dei concetti discussi al paragrafo precedente.

In generale possiamo scrivere la funzione d'onda come sovrapposizione di onde piane, autofunzioni simultanee di energia ed impulso della forma (3.1.1)

$$A^\mu(x) = \int d^4k \, a^\mu(k) \, e^{ik\cdot x} \tag{3.2.1}$$

Una singola componente di Fourier rappresenta il caso ideale di una particella che si propaga con quadri-vettore energia impulso k fissato, ed è caratterizzata dal vettore di polarizzazione $a^\mu(k)$ dipendente da k. Per fissare le idee, al solito, senza ledere la generalità, consideriamo un fotone che si propaga lungo l'asse z del riferimento O con energia E. Il quadri-vettore energia-impulso è $k = (E, 0, 0, E)$. Sul vettore a^μ non sappiamo nulla, ma affinchè la funzione d'onda descriva una particella di elicità $\sigma = 1$ è necessario che le proprietà di trasformazione del vettore a^μ siano consistenti con il risultato del paragrafo precedente. In particolare per una rotazione di un angolo θ intorno all'asse z, la (3.1.5) ci dice che la funzione d'onda risulta moltiplicata per un fattore di fase:

$$a^\mu \to e^{\pm i\theta} a^\mu \tag{3.2.2}$$

dove il segno $\pm$ dipende dalla elicità. D'altra parte, poichè a^μ è un quadri-vettore, per una rotazione deve trasformarsi come tutti i quadrivettori, cioè per il tramite delle matrici di rotazione:

$$a^\mu \to R_z(\theta)^\mu{}_\nu a^\nu \tag{3.2.3}$$

dove la matrice di rotazione intorno all'asse z è

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.2.4}$$

Mettendo insieme la (3.2.2) e la (3.2.3) abbiamo esplicitamente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = e^{\pm i\theta} \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \tag{3.2.5}$$

Eseguendo i prodotti ricaviamo delle condizioni sulle componenti del vettore di polarizzazione

$$\begin{pmatrix} a^0 \\ a^1\cos\theta + a^2\sin\theta \\ -a^1\sin\theta + a^2\cos\theta \\ a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^0 e^{\pm i\theta} \\ a^1 e^{\pm i\theta} \\ a^2 e^{\pm i\theta} \\ a^3 e^{\pm i\theta} \end{pmatrix}. \tag{3.2.6}$$

Segue subito che $a^0 = a^3 = 0$, mentre a^1 e a^2 devono soddisfare le equazioni (linearmente dipendenti)

$$a^2 = \pm i a^1 \tag{3.2.7a}$$

$$-a^1 = \pm i a^2 \tag{3.2.7b}$$

Queste ultime equazioni sono ovviamente equivalenti, e consentono la determinazione del vettore di polarizzazione a meno di un fattore moltiplicativo $b(k)$ dipendente da E

$$a^\mu(k) = b(k) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2.8}$$

Ricordando che $\pm i = e^{\pm i\frac{\pi}{2}}$, possiamo dedurre che A^μ è costituito dalla sovrapposizione di due moti oscillatori ortogonali sfasati di $\pm\pi/2$ ed entrambi ortogonali alla direzione di propagazione. Infatti, fissato z (poniamo per comodità $z = 0$), troviamo che solo la parte *spaziale* di A^μ è diversa da zero

$$\vec{A} = \vec{a}(k)\, e^{ik\cdot x} = b(k)\left[\hat{x}e^{-iEt} \pm i\hat{y}e^{-iEt}\right] = b(k)\left[\hat{x}e^{-iEt} + \hat{y}e^{-iEt\pm i\frac{\pi}{2}}\right] \tag{3.2.9}$$

dove $\hat{x}$ e $\hat{y}$ sono i versori degli assi. La sovrapposizione di due moti armonici ortogonali sfasati di $\pm\pi/2$, come è noto, è equivalente a moti circolari: il vettore $\vec{A}$ ruota nel piano ortogonale alla direzione del moto in senso destrorso o sinistrorso a seconda del segno della elicità (che determina il segno $\pm$ nelle espressioni precedenti).

Vediamo che, senza fare alcun uso delle equazioni di campo (equazioni di Maxwell), abbiamo determinato importanti caratteristiche della funzione d'onda per il fotone: si tratta di onde trasversali ed esistono due possibili polarizzazioni. Abbiamo solo utilizzato principi generali che riguardano le trasformazioni di simmetria nell'ambito di una teoria quantistica-relativistica.

4. Invarianza di gauge

4.1 Invarianza di gauge per il campo elettromagnetico

Abbiamo visto nel paragrafo 2.2 che esiste una trasformazione di simmetria che lascia invariato il quadri-vettore energia-impulso di una particella con massa nulla. Non abbiamo fino ad ora fatto uso di questa simmetria nel discutere le proprietà del campo associato al fotone (campo elettro-magnetico). La trasformazione Γ_α del paragrafo 2.2 descrive il passaggio da un riferimento inerziale O ad un altro riferimento O'. Il principio di relatività impone che le leggi della fisica siano covarianti, cioè assumano la stessa forma in tutti i riferimenti inerziali. Consideriamo allora nel riferimento O il solito fotone che si propaga in direzione dell'asse z con impulso $k = (E, 0, 0, E)$. Il fotone si trova in un autostato simultaneo dell'Hamiltoniana, dell'impulso e dell'elicità, ed il suo vettore di polarizzazione assume la forma (3.2.8):

$$a^\mu(k) = b(k) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{3.2.8}$$

Applicando la trasformazione Γ_α (2.2.11) al quadri-impulso k questo rimane invariato come discusso al paragrafo 2.2

$$(\Gamma_\alpha)^\mu{}_\nu k^\nu = k^\mu \tag{4.1.1}$$

Dunque nel riferimento O', per il citato principio di relatività, il vettore di polarizzazione dovrebbe assumere la stessa forma (3.2.8) che assume in O, essendo una funzione del solo quadri-vettore k. La covarianza della teoria impone cioè che il vettore di polarizzazione debba essere invariante nella trasformazione di simmetria, ovvero

$$(\Gamma_\alpha)^\mu{}_\nu a^\nu = a^\mu \tag{4.1.2}$$

In realtà il calcolo diretto mostra che la (4.1.2) è errata! Ricordando le espressioni esplicite della matrice Γ_α (2.2.11) e del vettore di polarizzazione a^μ (3.2.8) otteniamo

$$\begin{aligned} a'^\mu &= (\Gamma_\alpha)^\mu{}_\nu a^\nu = \\ &= \frac{b(k)}{\sin^2\alpha} \begin{pmatrix} 1+\cos^2\alpha & -\sin(2\alpha) & 0 & -2\cos^2\alpha \\ -\sin(2\alpha) & \sin^2\alpha & 0 & \sin(2\alpha) \\ 0 & 0 & \sin^2\alpha & 0 \\ 2\cos^2\alpha & -\sin(2\alpha) & 0 & \sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{b(k)}{\sin^2\alpha} \begin{pmatrix} -\sin(2\alpha) \\ \sin^2\alpha \\ \pm i \sin^2\alpha \\ -\sin(2\alpha) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

ovvero

$$a'^{\mu} = b(k) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2b(k)\cos\alpha}{E\sin\alpha} \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix} \tag{4.1.4}$$

In definitiva possiamo scrivere

$$a'^{\mu} = (\Gamma_\alpha)^{\mu}{}_{\nu} a^{\nu} = a^{\mu} - \left(\frac{2b(k)\cos\alpha}{E\sin\alpha} \right) k^{\mu} \tag{4.1.5}$$

Siamo dunque costretti a scegliere una tra le due sgradevoli opzioni: o accettare che la teoria non sia covariante (in riferimenti inerziali in cui k è identico, il vettore di polarizzazione assume forme diverse dipendenti dall'angolo α) oppure ammettere che i coefficienti a^{μ} non costituiscono un quadri-vettore (non valgono le trasformazioni di Lorentz per a^{μ}).

Una possibile via di uscita consiste nel modificare la definizione del vettore di polarizzazione a^{μ} in modo da costruire un vero quadrivettore che soddisfi la (4.1.2). Notiamo che la (4.1.2) e la (4.1.5) differiscono per un termine additivo proporzionale al vettore k^{μ}. Se il vettore a^{μ} fosse definito a meno di un termine additivo arbitrario ma proporzionale a k^{μ}, il problema non si porrebbe in quanto la (4.1.5) coinciderebbe con la (4.1.2). In altri termini, il principio di relatività impone che il vettore a^{μ} non sia univocamente definito, ma che esistano infiniti vettori equivalenti che, pur differendo per un termine additivo, descrivono la stessa situazione fisica.

Il significato del termine additivo diventa più chiaro calcolando la trasformata di Fourier inversa della (4.1.5) come indicato nella (3.2.1):

$$A'^{\mu}(x) = \int d^4k\, a'^{\mu}(k)\, e^{ik\cdot x} = \int d^4k\, a^{\mu}(k)\, e^{ik\cdot x} - \int d^4k \left(\frac{2b(k)\cos\alpha}{E\sin\alpha} \right) k^{\mu}\, e^{ik\cdot x} \tag{4.1.6}$$

ovvero

$$A'^{\mu}(x) = A^{\mu}(x) + i\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \int d^4k \left(\frac{2b(k)\cos\alpha}{E\sin\alpha} \right) e^{ik\cdot x} \tag{4.1.7}$$

e denotando con $\theta(x)$ la funzione

$$\theta(x) = i \int d^4k \left(\frac{2b(k)\cos\alpha}{E\sin\alpha} \right) e^{ik\cdot x} \tag{4.1.8}$$

possiamo scrivere semplicemente

$$A'^{\mu}(x) = A^{\mu}(x) + \frac{\partial\theta(x)}{\partial x_{\mu}}. \tag{4.1.9}$$

La trasformazione (4.1.5) è dunque una particolare trasformazione di gauge. Concludiamo che l'invarianza per trasformazioni di gauge è necessaria per garantire il rispetto del principio di relatività.

In pratica la misteriosa trasformazione di simmetria introdotta nel paragrafo (2.2), e descritta dalla matrice Γ_α, non lascia invariato il vettore di polarizzazione che invece subisce una particolare trasformazione di gauge definita dalla (4.1.5) o dalla (4.1.9). In questa trasformazione il fotone mantiene impulso, energia ed elicità invariati, e tutte le caratteristiche fisiche del campo associato al fotone non cambiano. La trasformazione è detta una trasformazione di simmetria *interna* della teoria poichè riguarda gradi di libertà interni: la simmetria è dovuta all'esistenza di una certa libertà di scelta del quadri-vettore A^μ, e non riguarda gradi di liberta "fisici".

4.2 Trasformazione di gauge per le funzioni d'onda

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che l'esistenza di una certa arbitrarietà nella scelta del potenziale vettore A^μ può essere vista come una sorta di simmetria interna della teoria. Esistono diversi esempi fisici di simili ridondanze nella scelta di alcune variabili: generalmente quando una variabile può assumere un valore arbitrario (senza cambiare la descrizione fisica) possiamo descrivere una generica variazione di tale variabile come una trasformazione di simmetria interna della teoria.

Un esempio notevole è dato dalla arbitrarietà nella scelta della fase della funzione d'onda in meccanica quantistica. Anche in assenza di accoppiamento con il campo elettromagnetico, la funzione d'onda di una particella non-relativistica è complessa, ma risulta definita a meno di una costante di fase arbitraria. Si tratta di una simmetria globale detta $U(1)$ poichè le leggi di trasformazione costituiscono il gruppo delle matrici unitarie a dimensione 1. Infatti una matrice di dimensione 1 è un semplice numero complesso, e la condizione di unitarietà equivale ad imporre che tale numero moltiplicato per il complesso coniugato dia 1. Si tratta cioè del gruppo dei numeri complessi di modulo unitario. La funzione d'onda è appunto definita a meno di un fattore moltiplicativo di modulo unitario (fattore di fase arbitrario). La rappresentazione geometrica dei numeri complessi nel piano consente di identificare il gruppo dei numeri di modulo unitario con la circonferenza di raggio unitario e centro nell'origine del piano complesso. Il gruppo $U(1)$ è dunque coincidente con il gruppo $O(2)$ delle rotazioni nel piano (gruppo delle matrici Ortogonali a dimensione 2, che è costituito dalle matrici di rotazione nel piano). Infatti, rappresentando in forma vettoriale nel piano complesso il valore assunto dalla funzione d'onda Ψ in un qualunque punto dello spazio, la funzione trasformata

$$\Psi' = e^{i\theta}\Psi \tag{4.2.1}$$

è rappresentata da un vettore ruotato di un angolo θ.

Questa simmetria interna è detta *globale* poichè lo sfasamento θ è lo stesso per qualunque punto dello spazio (θ è una costante indipendente dalla posizione nello spazio). Nella trasformazione (4.2.1) dunque la funzione d'onda è ruotata dello stesso angolo θ in tutti i punti dello spazio, al fine di mantenere invariata la descrizione fisica (tutte le ampiezze sono invarianti per una tale trasformazione globale).

È possibile aumentare la simmetria della funzione d'onda, e costruire una teoria che sia *localmente* invariante: invariante cioè per trasformazioni locali del tipo

$$\Psi'(x) = e^{i\theta(x)}\Psi(x) \tag{4.2.2}$$

in cui lo sfasamento $\theta(x)$ è una funzione delle coordinate. In questo caso la funzione d'onda è ruotata di una angolo locale diverso da punto a punto dello spazio. Una tale trasformazione non lascia invariati i valori medi degli operatori, e dunque non è una trasformazione di simmetria ammessa per la teoria di una semplice particella massiva non-relativistica. Per estendere la simmetria da globale a locale occorre modificare in qualche modo la teoria.

Consideriamo l'azione degli operatori $\vec{P} = -i\vec{\nabla}$ ed $H = i\partial/\partial t$ sulla funzione d'onda trasformata ψ'

$$\vec{P}\Psi' = \vec{P}\Psi e^{i\theta} = -i(\vec{\nabla}\Psi)e^{i\theta} + \Psi(\vec{\nabla}\theta)e^{i\theta} \tag{4.2.3}$$

$$H\Psi' = H\Psi e^{i\theta} = i\frac{\partial\Psi}{\partial t}e^{i\theta} - \Psi\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)e^{i\theta} \tag{4.2.4}$$

Affinchè i valori medi di queste osservabili rimangano invariati nella trasformazione, occorre modificare la definizione dei corrispondenti operatori introducendo gli operatori trasformati $\vec{P}'$ e H':

$$\vec{P}' = \vec{P} - \vec{\nabla}\theta \tag{4.2.5}$$

$$H' = H + \frac{\partial\theta}{\partial t}. \tag{4.2.6}$$

Infatti combinando le equazioni (4.2.5), (4.2.6) rispettivamente con la (4.2.3) e la (4.2.4) vediamo che

$$\vec{P}'\Psi' = -i(\vec{\nabla}\Psi)e^{i\theta} \tag{4.2.7}$$

$$H'\Psi' = i\frac{\partial\Psi}{\partial t}e^{i\theta} \tag{4.2.8}$$

e dunque

$$\Psi'^*\vec{P}'\Psi' = \Psi^*\vec{P}\Psi \tag{4.2.9}$$

$$\Psi'^*H'\Psi' = \Psi^*H\Psi \tag{4.2.10}$$

percui i valori medi di tali osservabili rimangono invariati.

Il lettore può inoltre facilmente verificare che, se la funzione d'onda Ψ soddisfa l'equazione di Schrödinger

$$H\Psi = \frac{(\vec{P})^2}{2m}\Psi + V(x)\Psi,$$

allora la funzione d'onda trasformata Ψ' soddisfa la nuova equazione di Schrödinger

$$H'\Psi' = \frac{(\vec{P}')^2}{2m}\Psi' + V(x)\Psi' \tag{4.2.11}$$

avendo denotato con $V(x)$ l'energia potenziale.

La teoria diventa quindi localmente invariante al costo di introdurre per gli operatori le trasformazioni (4.2.5) e (4.2.6) il cui significato non è del tutto evidente. Tuttavia vedremo tra breve che tali trasformazioni assumono un chiaro significato se la particella interagisce con un campo elettromagnetico: cioè l'invarianza locale della teoria richiede l'esistenza di un campo elettromagnetico accoppiato con la particella (o in altre parole la particella deve avere una carica elettrica).

Infatti in presenza di un campo elettromagnetico descritto dal potenziale vettore $A^\mu \equiv (\phi, \vec{A})$ l'equazione di Schrödinger di una particella di carica e risulta modificata e si ottiene con le sostituzioni

$$\vec{P} \to \vec{P} - e\vec{A} \tag{4.2.12}$$

$$H \to H - e\phi \tag{4.2.13}$$

In maniera equivalente gli operatori trasformati $\vec{P}'$ e H' definiti dalle (4.2.5), (4.2.6) devono essere sostituiti nella equazione di Schrödinger trasformata (4.2.11) con i nuovi operatori

$$\vec{P}' \to \vec{P} - \vec{\nabla}\theta - e\vec{A} \tag{4.2.14}$$

$$H' \to H + \frac{\partial\theta}{\partial t} - e\phi. \tag{4.2.15}$$

Denotando con

$$A'^\mu = A^\mu + \frac{\partial\theta}{\partial x_\mu} \tag{4.2.16}$$

le equazioni (4.2.14), (4.2.15) si scrivono semplicemente

$$\vec{P}' \to \vec{P} - e\vec{A}' \tag{4.2.17}$$

$$H' \to H - e\phi' \tag{4.2.18}$$

Confrontando queste con le (4.2.12), (4.2.13), vediamo che in questo caso la trasformazione dai vecchi $\vec{P}$, H ai nuovi $\vec{P}'$, H' è equivalente alla trasformazione di gauge (4.2.16) del potenziale vettore A^μ.

La teoria che descrive una particella carica gode dunque della seguente trasformazione di simmetria locale $U(1)$:

$$A'(x)^\mu = A^\mu(x) + \frac{\partial\theta(x)}{\partial x_\mu} \tag{4.2.16}$$

$$\Psi'(x) = e^{i\theta(x)}\Psi(x) \tag{4.2.2}$$

La descrizione fisica non cambia solo se si eseguono simultaneamente la trasformazione di gauge (4.2.16) sul potenziale vettore e la trasformazione locale (4.2.2) sulle funzioni d'onda. La trasformazione di gauge deve essere sempre accompagnata dalla trasformazione di fase delle funzioni d'onda. L'invarianza di gauge della teoria è dunque una simmetria interna locale che coinvolge non solo il campo elettromagnetico, ma anche tutte le funzioni d'onda delle particelle cariche che risultano accoppiate al campo elettromagnetico.