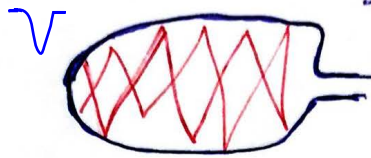


Indirizzo Teorico -Presentazione

Quali sono le vostre conoscenze relativamente a
Campi elettromagnetici ... Fotoni ... ?
Particelle Elementari?

1859 - KIRCHHOFF



Radiazione e.m. all'interno di una cavità

CORPO NERO

$$\rho(\nu, T)$$

1879 - STEFAN

1884 - BOLTZMANN

$$E_{irr.}(T) = V \cdot \int d\nu \rho(\nu, T) \propto T^4$$

1893 - WIEN :

a) $\rho(\nu, T) = \nu^3 \cdot f(\nu/T)$ (Teoria)

b) $\rho(\nu, T) = \alpha \cdot \nu^3 \cdot e^{-\beta \nu/T}$ (Ipotesi)

1900 : PLANCK

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/KT} - 1}$$

1905 : EINSTEIN

(a) GAS di n molecole (T, V) : $(\Delta S)_{V \rightarrow V'} = k \ln \left(\frac{V'}{V} \right)^n$

(b) Radiaz. e.m. dentro la cavità (T, V) di frequenza ν data $(\Delta S)_{V \rightarrow V'} = k \ln \left(\frac{V'}{V} \right)^{\frac{E}{h\nu}}$

(a) + (b) : **Quanto di luce : $E = h\nu$** $E = n \cdot h\nu$

Spiega : **EFFETTO FOTOELETTRICO** : $E_{max} = h\nu - \Phi$

$$|\vec{p}| = \frac{h\nu}{c}$$

1916 : EINSTEIN :

1923 : **COMPTON**
DEBYE

$$h\vec{k} = \vec{p} + h\vec{k}'$$
$$hc|\vec{k}| + mc^2 = hc|\vec{k}'| + \sqrt{e^2\vec{p}^2 + m^2c^4}$$

... FA A PUGNI CON LA **TEORIA CLASSICA DELL'ELETTRO MAGNETISMO**

- Eq. di Maxwell ($\vec{J}=0, \rho=0$)

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0} \quad \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0} \quad \boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}} \quad \boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

- Pot. Scal. $\phi(\vec{r}, t)$ & Pot. Vect. $\vec{A}(\vec{r}, t)$:

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} \quad \& \quad \boxed{\vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}}$$

~~...~~ Invarianza di Gauge

$$\begin{cases} \phi(\vec{r}, t) \rightarrow \phi'(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial f(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ \vec{A}(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{A}'(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} f(\vec{r}, t) \end{cases}$$

Gauge di Radiazione

~~...~~ $\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0}$ & $\boxed{\phi = 0}$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} = 0} \quad (1)$$

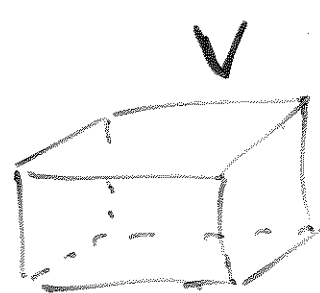
Una cosa che FORSE non avete fatto, ma che sapete fare

- Decomp. di Fourier

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \cdot \sum_{\vec{k}} \vec{e}_{\vec{k}}^{(i)} q_{\vec{k}}^{(i)}(t) e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$q_{-\vec{k}} = q_{\vec{k}}^*$

$q_{\vec{k}} = \text{Re} q_{\vec{k}} + i \text{Im} q_{\vec{k}}$



Vettore d'onda

$$\vec{e}_{\vec{k}}^{(1)} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \quad \& \quad \{ \vec{e}_{\vec{k}}^{(1)}, \vec{e}_{\vec{k}}^{(2)}, \vec{e}_{\vec{k}}^{(3)} \} =$$



$$(1) \Rightarrow \boxed{\ddot{q}_{\vec{k}}^{(i)}(t) + c^2 k^2 q_{\vec{k}}^{(i)}(t) = 0}$$

(*) $\boxed{q_{\vec{k}}^{(1)} = 0}$

$$\ddot{q}_{\vec{k}}^{(\nu)}(t) + c^2 k^2 q_{\vec{k}}^{(\nu)}(t) = 0$$

$$\nu = 2, 3$$

Formulazione Lagrangiana

(Peschiamo da uno dei vostri Corsi della Triennale: Meccanica Analitica)

$$\mathcal{L}_{\text{c.e.m. libero}} = \frac{1}{2c^2} \sum_{\vec{k}} \left\{ \dot{q}_{\vec{k}}^{(\nu)} \dot{q}_{-\vec{k}}^{(\nu)} - c^2 q_{\vec{k}}^{(\nu)} q_{-\vec{k}}^{(\nu)} \right\}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{\vec{k}}^{(\nu)}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{\vec{k}}^{(\nu)}} = 0$$

Equazioni di Lagrange per il Campo Elettromagnetico Libero

Formulazione Hamiltoniana

$$\mathcal{L} \rightarrow H = \sum_{\alpha} P_{\alpha} \dot{Q}_{\alpha} - \mathcal{L}$$

$$P_{\alpha} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_{\alpha}} \quad \Rightarrow$$

$$P_{\vec{k}}^{(\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{\vec{k}}^{(\nu)}} = \frac{1}{c^2} \dot{q}_{\vec{k}}^{(\nu)}$$

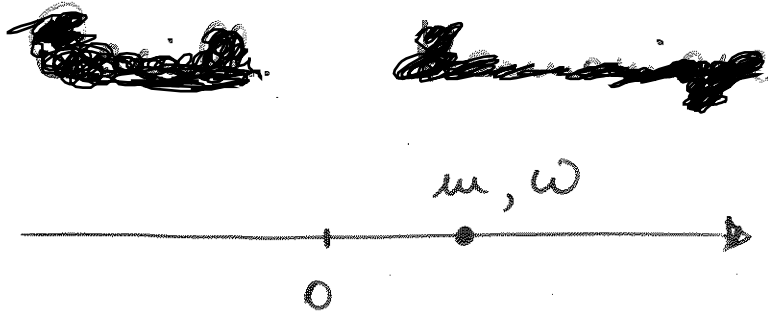
$$P_{-\vec{k}} = P_{\vec{k}}^*$$

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \left\{ c^2 P_{\vec{k}}^{(\nu)} P_{-\vec{k}}^{(\nu)} + k^2 q_{\vec{k}}^{(\nu)} q_{-\vec{k}}^{(\nu)} \right\}$$

Funzione di Hamilton del Sistema Campo Elettromagnetico Classico

Fin qui : Elettromagnetismo Classico

Adesso andiamo ad attingere da un altro corso del triennio ...



$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{x}^2$$

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \cdot (m\omega\hat{x} + i\hat{p})$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \cdot (m\omega\hat{x} - i\hat{p})$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

$$\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle$$

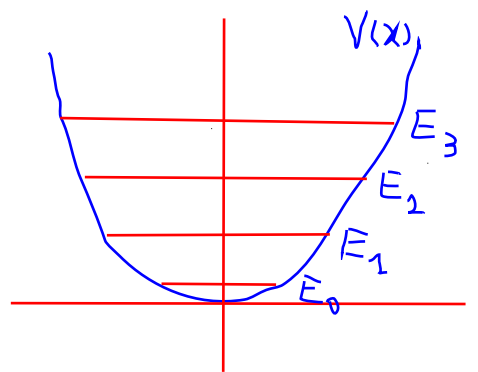
$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$$

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} \hat{H} |0\rangle = 0 \\ \hat{N} |0\rangle = 0 \end{array} \right)$$

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$$



Equispaziatura dei Livelli energetici

Hamiltoniana del Campo Elettromagnetico Quantistico

5

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \lambda} \left\{ e^2 \hat{p}_{\vec{k}}^{(\lambda)} \hat{p}_{-\vec{k}}^{(\lambda)} + k^2 \hat{q}_{\vec{k}}^{(\lambda)} \hat{q}_{-\vec{k}}^{(\lambda)} \right\}$$

Meccanica Quantistica "solita"

$$[\hat{q}_{\vec{k}}^{(\lambda)}, \hat{p}_{\vec{k}'}^{(\lambda')}] = \underline{\underline{i\hbar}} \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{\lambda, \lambda'}$$

Come nel caso dell'oscillatore armonico sopra ... definite

$$a_{\vec{k}}^{(\lambda)}, a_{\vec{k}}^{(\lambda)\dagger}$$

... I Fotoni che cosa hanno a che vedere con tutto ciò ...

Esempio di un particolare stato $|\Psi\rangle$ del Campo e.m. Quantistico

$$| (3)_{\vec{k}_1} ; (2)_{\vec{k}_2} \rangle = \frac{(\hat{a}_{\vec{k}_1}^{(1)\dagger})^3}{\sqrt{3!}} \cdot \frac{(\hat{a}_{\vec{k}_2}^{(2)\dagger})^2}{\sqrt{2!}} | 0 \rangle$$

Fotone = Quanto del campo Elettromagnetico



... Questo discorso vale per tutte le

Particelle Elementari

elettroni, positroni, muoni, antimuoni, neutrini, fotoni, quarks, ...

e^- , e^+ , μ^- , μ^+ , ν , γ , u , d , ...

Ogni particella è il quanto di un certo Campo (Quantistico)

... Ma è necessario occuparsi di ciò ... o si tratta di Astruserie da Teorici ?

Stiamo parlando di Fisica, quella scienza sperimentale che tutti conosciamo, o stiamo assecondando il piacere di qualche Fisico con la passione per la Matematica?

Campo Classico versus Quantistico - I

Livello 1

Ci sono fenomeni per i quali la descrizione fornita dalla Teoria di Campo Quantistica e dalla corrispondente Teoria Classica sono indistinguibili.

Esempio : Campo Elettromagnetico. Trasmissioni radiofoniche, televisive (onde radio)...

Basandosi su questa esperienza, alcuni credono di poter fare a meno della Teoria Quantistica dei Campi, pensano che si tratti solo una astruseria dei fisici teorici, i quali non sarebbero capaci di trovare modo migliore di impiegare le loro giornate!

In particolare, nel caso dell'esempio del campo elettromagnetico, pensano che la teoria classica di Maxwell sia tutto quello che c'è da sapere. Dopo tutto, funziona così bene!

Ma le cose non stanno così !

Vediamo più in dettaglio...

Livello 2

Campo Classico versus Quantistico - II

Per la descrizione di certi fenomeni, e sotto ben precise condizioni di approssimazione, la Teoria Quantistica dei Campi, ancora una volta, dà ~~gli stessi~~ risultati ~~della corrispondente Teoria Classica~~ che con buona approssimazione sono quelli della teoria classica

Esempio : Campo Elettromagnetico.

Considero la diffusione della luce (fotoni) da parte di un elettrone. Faccio il calcolo della sezione d'urto di diffusione sia con l'Elettrodinamica Classica sia con l'Elettrodinamica Quantistica). Confronto e trovo che:

- 1) All'ordine più basso della teoria delle perturbazioni, l'Elettrodinamica Quantistica dà lo stesso risultato dell'Elettrodinamica Classica. ←
- 2) A ordini successivi nella teoria delle perturbazioni, il risultato viene corretto in una maniera che può essere apprezzata. ←
- 3) Confronto con l'esperimento. La sezione d'urto misurata coincide (spiccicata!) col risultato ottenuto utilizzando l'Elettrodinamica Quantistica (il risultato classico aveva dato una discreta approssimazione).



Livello 3

Ma c'è di più ...

Ci sono altri fenomeni naturali, come il semplicissimo ed onnipresente (nella vita di tutti i giorni) decadimento di atomi dallo stato eccitato allo stato fondamentale, che non siamo in grado di descrivere (a nessun livello di approssimazione!) senza considerare il fatto che il Campo Elettromagnetico è intrinsecamente Quantistico e non Classico.

Finora avete dato una descrizione piuttosto elementare, e a dire il vero insoddisfacente della

**EMISSINE
SPONTANEA**

non avevate ancora gli strumenti adeguati ...

In Elettrodinamica Quantistica, potete calcolare la vita media dello stato eccitato di un atomo. Per esempio, per il decadimento di un atomo di Idrogeno dallo stato eccitato $2s$ (energia E_2) allo stato fondamentale (energia E_1), trovate:

$$vita\ media \approx 10^{-9} sec. \quad (1)$$

Ora potete confrontare questo risultato con l'esperimento. Spicciato!

In questo caso, le condizioni che potrebbero portare ad una descrizione classica, non sono verificate! Il decadimento di un atomo dallo stato eccitato allo stato fondamentale richiede necessariamente (!) la trattazione del Campo Elettromagnetico come campo quantistico. Non c'è alcun limite classico.

Teorie Quantistiche di Campo - Paradigma generale

Teorie Quantistiche di Campo realizzate in Natura

Elettrodinamica Quantistica

Interazione debole

Interazione forte (Cromodinamica Quantistica)

Interazione Gravitazionale

Unificazione : Teoria Elettrodebole

.....

Ma non finisce qui ...

→ L'intero Universo (noi compresi) è una manifestazione della natura Quantistica dei Campi.

Ciò non solo perchè, come abbiamo già detto,

1) tutte le particelle elementari (e^- , e^+ , μ^- , μ^+ , ν , γ , ...) sono quanti di un Campo. C'è anche ... (Sorpresa!!!) ←

2) un livello davvero inaspettato (verificato sperimentalmente in tempi molto recenti) :

Persino le grandissime strutture come le Galassie e gli Ammassi di Galassie hanno avuto origine nell'Universo Primordiale (circa 13,7 miliardi di anni fa), quando l'intero Universo era piccolissimo, da

→ Fluttuazioni quantistiche del Campo $\phi(\vec{r}, t)$, il Campo dell'Inflazione! ←

Dobbiamo parlare di Cosmologia allora.....

All science is cosmology, Karl Popper

Relatività Generale

Geometria dello Spazio -Tempo : definita da una **metrica** $g_{\mu\nu}(x)$.

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2)$$

Equazioni di Einstein : $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$.

Cosmologia – Big-Bang

Relatività Generale + Omogeneità ~~e~~ e Isotropia dell'Universo (Osservazione).

1) Le sole metriche compatibili con omogeneità e isotropia sono ($\kappa = 0, -1, 1$):

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (3)$$

2) Contenuto di materia compatibile con omogeneità e isotropia : Tensore Energia-impulso ($\rho =$ densità di energia, $p =$ pressione):

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{Diag} (-\rho(t), p(t), p(t), p(t)). \quad (4)$$

Inseriamo (3) e (4) nella Equazione di Einstein. Otteniamo:

Equazioni di Friedmann-Lemaître

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{\kappa}{a^2} \quad ; \quad \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad (5)$$

Equazione di stato : $p = w\rho$ (w costante). Include due tipi di materia che giocano un ruolo importante in Cosmologia:

- 1) gas di particelle relativistiche : $w = 1/3$
- 2) materia non relativistica : $w \simeq 0$.

Facilissimo integrare la seconda delle Eq.(5) : $\rho \propto a^{-3(1+w)}$

Sostituendo nella prima (con $\kappa = 0$) otteniamo : $\dot{a}^2 \propto a^{2-3(1+w)}$

anch'essa facilissim(issim)a (!) da integrare.

- 1) In un Universo dominato da materia relativistica : $a(t) \propto t^{1/2}$
- 2) In un Universo dominato da materia non-relativistica : $a(t) \propto t^{2/3}$

Universo in espansione

Big-Bang !!!

Storia Termica dell'Universo

Applicando un po' di Termodinamica si trova che, al crescere del fattore di scala $a(t)$ col tempo, l'Universo si raffredda. Mentre l'Universo si espande, i tassi di reazione tra le diverse specie di particelle si modificano. Un'analisi dettagliata di questi cambiamenti permette di ricostruire la Storia Termica dell'Universo.

Due eventi importanti :

- 1) **Nucleosintesi Primordiale** degli elementi leggeri (circa un minuto dopo il Big-Bang). Quando l'Universo si è raffreddato abbastanza, protoni e neutroni possono combinarsi dando luogo alla produzione degli elementi leggeri: Elio, Deuterio, Litio. (Calcolo e misura : buon accordo!)
- 2) **Disaccoppiamento dei fotoni** dal resto della materia (circa 380.000 anni dopo il Big-Bang). Da quel momento i fotoni primordiali viaggiano liberi nell'Universo, costituendo quella che chiamiamo **Radiazione Cosmica di Fondo**. Sperimentalmente Misurata! (da Penzias e Wilson nel 1964) Per caso! (ma era stata predetta da un fisico teorico, Gamow, anni '50).

Cosmic Microwave Background

Quando si sono disaccoppiati dal resto della materia, i fotoni erano in equilibrio termico con essa. La loro distribuzione era pertanto quella di **Corpo Nero** ad una certa temperatura. Anche dopo il disaccoppiamento, a distribuzione del gas di fotoni resta quella di **Corpo Nero**. Allora, possiamo definire una temperatura per questi fotoni non solo quando questi interagivano fortemente con la materia ma anche dopo che si sono disaccoppiati dal resto (questa temperatura la definiamo a partire dalla specifica curva di Planck). La $T(t)$ così definita evolve col tempo come

$$T(t) \propto \frac{1}{a(t)} \quad (6)$$

Attualmente : $T \sim 2.7$ gradi Kelvin che corrisponde ad una radiazione nel **range delle microonde**. **Misurata!**

Tuttavia, se guardando in tutte le direzioni nel cielo la temperatura risultasse sempre la stessa, **avremmo un grande problema!**

Fluttuazione della temperatura (misurata!!!)

$$\frac{\delta T}{T} \sim 10^{-5}$$

Spettacolari successi della Teoria del Big-Bang

- 1) Predizione della Nucleosintesi Primordiale
- 2) Predizione della Radiazione Cosmica di Fondo

Problemi con la Teoria Standard del Big-Bang

- 1) Problema dell'Omogeneità
- 2) Problema della Piattezza
- 3) Problema dell'Orizzonte

Inflazione

Si ipotizza l'esistenza di un campo (scalare), che dà il proprio contributo a ρ e p . Grazie alla presenza di questo campo, l'Universo subisce una rapidissima espansione nei primissimi istanti (circa 10^{-35} secondi !!!) dopo il Big-Bang. Questo risolve tutti i problemi citati sopra.

Semi Cosmici

Le Fluttazioni Quantistiche del Campo $\phi(\vec{x}, t)$

Una volta che stiamo considerando questo campo, non possiamo trascurare la sua natura intrinsecamente quantistica.

Qui viene la grande sorpresa !!!

Predizione spettacolare e conferma sperimentale !!

Informazioni :

branchina@ct.infn.it

Dipartim. Fisica secondo piano: 