

Esempi di esercizi

1. Un oscillatore armonico unidimensionale, di massa m , e costante elastica k , ha costante di smorzamento η . Esso è sollecitato da una forza $F(t) = F e^{i\omega t}$.
 - (a) Spiegare in che senso possiamo considerare una forza complessa. Trovare la relazione tra l'ampiezza del moto a tempi lunghi e la frequenza angolare ω della forza esterna, trovando da questa relazione il valore di ω per cui l'ampiezza è massima.
 - (b) trascurando lo smorzamento, ed ammettendo che l'oscillatore sia accoppiato ad un altro oscillatore identico tramite un potenziale $U = \frac{a}{2} (x_1 - x_2)^2$, calcolare le frequenze proprie di vibrazione del sistema.
2. Una particella incidente su un gradino di potenziale, $V(x) = 0$ per $x < 0$ e $V(x) = U$ per $x \geq 0$, è descritta dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} [(1+i)e^{ikx} + (1-i)e^{-ikx}] & x \leq 0 \\ e^{-kx} & x \geq 0 \end{cases}$$

dove k è una quantità reale.

- (a) Verificare con calcolo diretto che il coefficiente di riflessione è unitario. Qual è la relazione tra E e k perchè $\psi(x)$ soddisfi l'equazione di Schrödinger, nella regione $x > 0$?
 - (b) Trovare il valore di E/U perchè la soluzione valga per ogni x . Calcolare la lunghezza di penetrazione per protoni di 10 MeV.
3. Si consideri una buca di potenziale a pareti infinite, che descrive una particella che si muove nella regione $0 < x < L$, inizialmente nello stato

$$\psi(x) = \frac{2}{L} \left(1 + 2 \cos \frac{\pi x}{L}\right) \sin \frac{\pi x}{L}$$

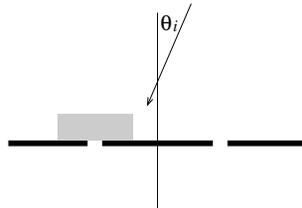
Calcolare l'evoluzione temporale della particella e il valor medio dell'energia.

- (b) Si consideri il caso in cui si esercita ulteriormente una forza uniforme F . Determinare quali degli elementi di matrice del potenziale tra autostati sono non nulli. Giustificate il risultato in termini di simmetrie del problema.
4. Una carica elettrica q di massa m si muove nel vuoto in presenza di un campo magnetico uniforme e costante. Determinarne il moto supponendo che la velocità iniziale abbia componenti diverse da zero sia nella direzione parallela che nella direzione perpendicolare a quella del campo. Trascurare l'effetto della forza di gravità e dell'emissione di radiazione.

5. Si consideri una buca di potenziale unidimensionale a pareti infinite.
- (a) Verificare che le autofunzioni dell'energia $\phi_n(x)$ non sono autofunzioni di \hat{p} e per esse calcolare il valor medio $\langle p \rangle$. Stimare inoltre l'indeterminazione dell'impulso Δ_p nello stato, a partire dall'energia di confinamento.
- (b) Calcolare per un autostato generico $\phi_n(x)$ l'indeterminazione dell'impulso e descrivere la distribuzione delle misure di \hat{p} .
6. Sia data la legge di Planck

$$u_\omega(T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$$

- (a) Discutere sotto quali condizioni la quantizzazione è trascurabile, e ricavare la forma limite di Rayleigh-Jeans.
- (b) Dalla ipotesi di quantizzazione di Planck, calcolare il valor medio dell'energia per modo $\langle \epsilon \rangle$ all'interno della cavità.
7. Un'onda piana, proveniente da una sorgente infinitamente lontana, incide ortogonalmente su uno schermo provvisto di due fenditure, poste a distanza d , e di dimensioni trascurabili rispetto ad essa.
- (a) Trovare gli angoli θ per cui l'interferenza al di là della fenditura è massima. Come si modifica la posizione del massimo principale se l'angolo di incidenza è $\theta_i \leq \pi/2$?
- (b) Per un angolo di incidenza $\theta_i = \pi/6$, come varia la figura di diffrazione se prima di una delle fenditure viene posta una lamina di spessore $x = d$ di materiale trasparente con indice di rifrazione $n = 1.5$?



8. La struttura iperfina dell'atomo di idrogeno produce una riga di emissione di frequenza 1.4 GHz. Rappresentiamo la Hamiltoniana di interazione responsabile della separazione dei livelli con $H = k \vec{\sigma}_e \cdot \vec{\sigma}_p$ ($\vec{\sigma}$ sono, rispettivamente, gli operatori di Pauli associati allo spin dell'elettrone e del protone).
- (a) Trovare autostati e autovettori.

- (b) Calcolare il valore della costante k , e la popolazione relativa tra i livelli elettronici a temperatura di 300 K.
9. (a) Dimostrare che le equazioni del moto per gli operatori \hat{x} e \hat{p} di un oscillatore armonico riproducono le equazioni del moto classiche.
 (b) Mostrare che in un problema con Hamiltoniana indipendente dal tempo, se un'osservabile commuta con la Hamiltoniana, la distribuzione dei possibili risultati della misura della suddetta osservabile è stazionaria.
10. Per una transizione liquido-gas, determinare i valori critici di pressione, temperatura e volume p_c , T_c e v_c a partire dall'equazione di stato di van der Waals e riscriverla in forma adimensionale (legge degli stati corrispondenti)
11. Un conduttore cilindrico attraversato da una corrente stazionaria I . Il conduttore ha sezione A ed è composto da due materiali differenti. Il materiale 1 ha lunghezza l_1 e resistività ρ_1 , il materiale 2 ha lunghezza l_2 e resistività ρ_2 . Quanto vale la densità di carica elettrica accumulata sull'interfaccia tra i due materiali?
12. Un oggetto viene fatto cadere da un'altezza h con una velocità iniziale v_i . Una volta a terra rimbalza perdendo metà della sua energia cinetica. Trascurando gli attriti con l'aria, calcolare il valore di v_i che l'oggetto deve avere per aggiungere di nuovo l'altezza h dopo il rimbalzo.
13. Una spira circolare di raggio R percorsa da una corrente i . Sull'asse della spira, a distanza $x = R$ dal suo centro, si trova una particella paramagnetica sferica di raggio r . Calcolare la suscettività magnetica della particella sapendo che per portare tale particella a distanza infinita occorre spendere un lavoro L . Si assuma che:
- i campi siano uniformi dentro la sfera;
 - si possa trascurare la perturbazione del campo magnetico creato nello spazio esterno dalla particella;
 - si possa trascurare l'effetto smagnetizzante all'interno della particella.
14. Un fotone X di energia pari a 50 keV urta un elettrone fermo e rimbalza indietro, mentre l'elettrone parte in avanti. Quanto vale l'energia del fotone riflesso? Quanto vale l'energia cinetica dell'elettrone?
15. Derivare la legge di decadimento di una sostanza radioattiva e calcolarne il tempo di dimezzamento