

Esempi di esercizi

1. Un oscillatore armonico unidimensionale, di massa m , e costante elastica k , ha costante di smorzamento η . Esso è sollecitato da una forza $F(t) = F e^{i\omega t}$.
 - (a) Spiegare in che senso possiamo considerare una forza complessa. Trovare la relazione tra l'ampiezza del moto a tempi lunghi e la frequenza angolare ω della forza esterna, trovando da questa relazione il valore di ω per cui l'ampiezza è massima.
 - (b) trascurando lo smorzamento, ed ammettendo che l'oscillatore sia accoppiato ad un altro oscillatore identico tramite un potenziale $U = \frac{a}{2} (x_1 - x_2)^2$, calcolare le frequenze proprie di vibrazione del sistema.
2. Una particella incidente su un gradino di potenziale, $V(x) = 0$ per $x < 0$ e $V(x) = U$ per $x \geq 0$, è descritta dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} [(1+i)e^{ikx} + (1-i)e^{-ikx}] & x \leq 0 \\ e^{-kx} & x \geq 0 \end{cases}$$

dove k è una quantità reale.

- (a) Verificare con calcolo diretto che il coefficiente di riflessione è unitario. Qual è la relazione tra E e k perché $\psi(x)$ soddisfi l'equazione di Schrödinger, nella regione $x > 0$?
 - (b) Trovare il valore di E/U perché la soluzione valga per ogni x . Calcolare la lunghezza di penetrazione per protoni di 10 MeV.
3. Si consideri una buca di potenziale a pareti infinite, che descrive una particella che si muove nella regione $0 < x < L$, inizialmente nello stato

$$\psi(x) = \frac{2}{L} \left(1 + 2 \cos \frac{\pi x}{L}\right) \sin \frac{\pi x}{L}$$

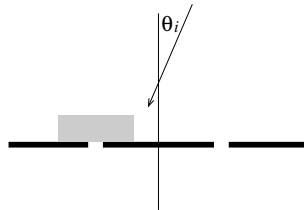
Calcolare l'evoluzione temporale della particella e il valor medio dell'energia.

- (b) Si consideri il caso in cui si esercita ulteriormente una forza uniforme F . Determinare quali degli elementi di matrice del potenziale tra autostati sono non nulli. Giustificate il risultato in termini di simmetrie del problema.
4. Una carica elettrica q di massa m si muove nel vuoto in presenza di un campo magnetico uniforme e costante. Determinarne il moto supponendo che la velocità iniziale abbia componenti diverse da zero sia nella direzione parallela che nella direzione perpendicolare a quella del campo. Trascurare l'effetto della forza di gravità e dell'emissione di radiazione.

5. Si consideri una buca di potenziale unidimensionale a pareti infinite.
- (a) Verificare che le autofunzioni dell'energia $\phi_n(x)$ non sono autofunzioni di \hat{p} e per esse calcolare il valor medio $\langle p \rangle$. Stimare inoltre l'indeterminazione dell'impulso Δ_p nello stato, a partire dall'energia di confinamento.
- (b) Calcolare per un autostato generico $\phi_n(x)$ l'indeterminazione dell'impulso e descrivere la distribuzione delle misure di \hat{p} .
6. Sia data la legge di Planck

$$u_\omega(T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$$

- (a) Discutere sotto quali condizioni la quantizzazione è trascurabile, e ricavare la forma limite di Rayleigh-Jeans.
- (b) Dalla ipotesi di quantizzazione di Planck, calcolare il valor medio dell'energia per modo $\langle \epsilon \rangle$ all'interno della cavità.
7. Un'onda piana, proveniente da una sorgente infinitamente lontana, incide ortogonalmente su uno schermo provvisto di due fenditure, poste a distanza d , e di dimensioni trascurabili rispetto ad essa.
- (a) Trovare gli angoli θ per cui l'interferenza al di là della fenditura è massima. Come si modifica la posizione del massimo principale se l'angolo di incidenza è $\theta_i \leq \pi/2$?
- (b) Per un angolo di incidenza $\theta_i = \pi/6$, come varia la figura di diffrazione se prima di una delle fenditure viene posta una lamina di spessore $x = d$ di materiale trasparente con indice di rifrazione $n = 1.5$?



8. La struttura iperfine dell'atomo di idrogeno produce una riga di emissione di frequenza 1.4 GHz. Rappresentiamo la Hamiltoniana di interazione responsabile della separazione dei livelli con $H = k \vec{\sigma}_e \cdot \vec{\sigma}_p$ ($\vec{\sigma}$ sono, rispettivamente, gli operatori di Pauli associati allo spin dell'elettrone e del protone).
- (a) Trovare autostati e autovettori.

- (b) Calcolare il valore della costante k , e la popolazione relativa tra i livelli elettronici a temperatura di 300 K.
9. (a) Dimostrare che le equazioni del moto per gli operatori \hat{x} e \hat{p} di un oscillatore armonico riproducono le equazioni del moto classiche.
(b) Mostrare che in un problema con Hamiltoniana indipendente dal tempo, se un'osservabile commuta con la Hamiltoniana, la distribuzione dei possibili risultati della misura della suddetta osservabile è stazionaria.
10. Per una transizione liquido-gas, determinare i valori critici di pressione, temperatura e volume p_c , T_c e v_c a partire dall'equazione di stato di van der Waals e riscriverla in forma adimensionale (legge degli stati corrispondenti)
11. Un conduttore cilindrico attraversato da una corrente stazionaria I . Il conduttore ha sezione A ed è composto da due materiali differenti. Il materiale 1 ha lunghezza l_1 e resistività ρ_1 , il materiale 2 ha lunghezza l_2 e resistività ρ_2 . Quanto vale la densità di carica elettrica accumulata sull'interfaccia tra i due materiali?
12. Un oggetto viene fatto cadere da un'altezza h con una velocità iniziale v_i . Una volta a terra rimbalza perdendo metà della sua energia cinetica. Trascurando gli attriti con l'aria, calcolare il valore di v_i che l'oggetto deve avere per aggungere di nuovo l'altezza h dopo il rimbalzo.
13. Una spira circolare di raggio R percorsa da una corrente i . Sul'asse della spira, a distanza $x = R$ dal suo centro, si trova una particella paramagnetica sferica di raggio r . Calcolare la suscettività magnetica della particella sapendo che per portare tale particella a distanza infinita occorre spendere un lavoro L . Si assuma che:
- i campi siano uniformi dentro la sfera;
 - si possa trascurare la perturbazione del campo magnetico creata nello spazio esterno dalla particella;
 - si possa trascurare l'effetto smagnetizzante all'interno della particella.
14. Un fotone X di energia pari a 50 keV urta un elettrone fermo e rimbalza indietro, mentre l'elettrone parte in avanti. Quanto vale l'energia del fotone riflesso? Quanto vale l'energia cinetica dell'elettrone?
15. Derivare la legge di decadimento di una sostanza radioattiva e calcolarne il tempo di dimezzamento.

16. Un nucleo di elio ($q = 3.2 \cdot 10^{-19}$ C e $m = 6.68 \cdot 10^{-27}$ kg) viaggia con velocità v_0 ed entra in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico uniforme di modulo $B = 10^{-5}$ T, perpendicolare a v_0 . Se il campo magnetico viene spento istantaneamente dopo un tempo $t^* = 1$ ms dall'ingresso del nucleo nella regione con il campo magnetico, determinare l'angolo fra le velocità $v(t^*)$ e v_0 .
17. Un elettrone che all'istante $t_0 = 0$ si trova nell'origine di un sistema cartesiano ortogonale e si muove nel verso positivo dell'asse x con velocità $v_x = 2.5 \cdot 10^{-7}$ m/s, è sottoposto ad un campo elettrico $E_z = 200$ V/m diretto come il versore $-\mathbf{k}$. Calcolare la posizione dell'elettrone all'istante $t = 5 \cdot 10^{-8}$ s.
18. Una particella di massa m è confinata in una dimensione nella regione $0 \leq x \leq L$. A $t = 0$ la funzione d'onda normalizzata è:

$$\Psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{L}}(1 + 2 \cos(\pi x/L)) \sin(\pi x/L) \quad (1)$$

- (a) Qual è la funzione d'onda ad un tempo successivo $t = t_0$?
- (b) Qual è l'energia e l'impulso medio a $t = 0$? Ed ad un tempo $t = t_0$ (motivare la risposta anche senza effettuare calcoli)?
- (c) Data la probabilità di trovare la particella nella metà $0 \leq x \leq L/2$ a $t = 0$, dire se questa probabilità varia nel tempo (motivare la risposta anche senza effettuare calcoli).

(Sugg.: si ricorda che gli autostati sono $\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(n\pi x/L)$ e gli autovalori $E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2$.)

19. La dinamica di una particella carica in un campo magnetico è determinata dalla seguente hamiltoniana: $H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q/c\mathbf{A}(\vec{r}))^2$, dove q è la carica della particella, $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ l'impulso coniugato e $\mathbf{A} = -B_0 y \mathbf{e}_x$, che corrisponde ad un campo magnetico costante $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$.
- (a) Dimostrare che p_x e p_z si conservano.
- (b) Trovare lo spettro dei livelli quantistici del sistema (per semplicità porre $\omega = qB/mc$).
20. Una sorgente radioattiva puntiforme emette elettroni che possono essere rivelati da un contatore Geiger posto ad una certa distanza da essa. In una

misura di conteggi effettuata in un minuto sono stati ottenuti 5230 conteggi. La stessa misura, ripetuta a distanza di 24 h dalla prima, senza modificare la posizione della sorgente e del rivelatore, dà un risultato di 1015 conteggi in un minuto. Valutare la vita media della sorgente, tenendo conto che il contatore Geiger, in assenza di sorgente, presenta un tasso di conteggi di fondo pari a 35 eventi/minuto, misurato con estrema precisione. Quanto vale l'incertezza sul rapporto tra i conteggi ottenuti nelle due misure e dovute alla sorgente?

21. Uno scintillatore di forma cilindrica, di diametro 5 cm, ha un'efficienza intrinseca del 12% per i gamma emessi dal ^{137}Cs (di energia pari a 662 keV). Una sorgente puntiforme di tale isotopo di attività pari a $1 \mu\text{Ci}$ è posta ad una distanza di 15 cm dallo scintillatore, lungo il suo asse. Valutare quanto tempo occorrerà perché lo scintillatore riveli un numero di gamma pari a 20000. Qual è la probabilità che due gamma indipendenti provenienti dalla stessa sorgente siano rivelati dallo scintillatore in un tempo di 1 microsecondo?
22. Un protone ($q = 1.6 \cdot 10^{-19}\text{C}$ e $m = 1.67 \cdot 10^{-27}\text{kg}$) che viaggia con velocità $v = 300\text{km/s}$ entra in una regione, di profondità $d = 10 \text{ cm}$, in cui è presente un campo magnetico uniforme \mathbf{B} , perpendicolare alla velocità iniziale del protone. Se il protone esce da questa regione con un angolo $\theta = 45 \text{ deg}$ rispetto alla direzione iniziale, determinare il valore del modulo del campo \mathbf{B} .
23. Un elettrone che all'istante $t_0 = 0$ si trova nell'origine di un sistema cartesiano ortogonale e si muove nel verso positivo dell'asse x con velocità $v_x = 2.5 \cdot 10^{-7}\text{m/s}$, è sottoposto ad un campo elettrico $E_z = 200\text{V/m}$ diretto come il versore $-\mathbf{k}$. Trovare il campo magnetico \mathbf{B} (direzione, verso e modulo) che permette di mantenere l'elettrone su di una traiettoria rettilinea parallela all'asse x .
24. Un elettrone è confinato nello stato fondamentale di un oscillatore armonico unidimensionale in maniera tale che $\Delta x = \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle} = 10^{-10}\text{m}$.
 - (a) Trovare l'energia richiesta per portare l'elettrone al primo stato eccitato. (Sugg.: teorema del viriale)
 - (b) Mostrare che l'energia non può essere inferiore ad $h\omega/4\pi$ utilizzando il principio di indeterminazione $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$, dove $(\Delta p)^2 = \langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle$.
 - (c) Ricordando che lo stato fondamentale ha la funzione d'onda

$$\Psi_0 = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha x^2/2} \quad (2)$$

con $\alpha = m\omega/\hbar$, calcolare la probabilità che l'elettrone si trovi fuori della regione permessa classicamente. (Suggerimento: $\int_1^\infty \pi^{-1/2} e^{-t^2} dt \sim 0.08$)

Se l'elettrone fosse confinato in maniera tale che $\Delta x = 1\text{m}$, cambierebbe tale probabilità (motivare la risposta)?

25. Un sistema fisico è descritto dalla hamiltoniana $\hat{H} = \hbar/I\hat{L}_z$ si trova all'istante $t = 0$ nello stato

$$|\Psi_0\rangle = \alpha|1, 1\rangle + \beta|1, -1\rangle \quad (3)$$

con $|l, m\rangle$ autostati di L^2 e L_z .

- (a) Gli autovalori di L^2 dipendono dai coefficienti α, β ? Ed il valore di aspettazione di L^2 (motivare la risposta)?
- (b) Determinare α, β reali nel caso in cui $\langle L_z \rangle = h/4\pi$ e la probabilità di avere una misura con L_z che dia $+h/2\pi$.
- (c) Calcolare la probabilità che il sistema dopo un tempo t si trovi nello stato $|\Psi_0\rangle$ iniziale.
26. Una sorgente radioattiva di ^{22}Na di dimensioni trascurabili, avente un'attività iniziale di 100 kBq viene utilizzata per una misura 5 anni dopo il suo acquisto. Se il tempo di dimezzamento del ^{22}Na è di 2.6 anni, quale attività presenta la sorgente durante la misura? Dal decadimento del ^{22}Na sono emessi 2 gamma in direzione opposta. Se la sorgente è posta in posizione centrale tra due rivelatori eguali di forma cilindrica (con diametro pari a 3 cm) e distanti tra loro 20 cm, e aventi ciascuno un'efficienza intrinseca del 20% per tali gamma, lungo la direzione del loro asse comune, quanti fotoni al secondo sono rivelati in ciascuno dei due rivelatori? Quante coincidenze al secondo tra i due gamma potrebbero essere osservate?
27. In un esperimento di conteggio di raggi cosmici condotto con un contatore Geiger di piccole dimensioni, vengono misurati 37 conteggi in un minuto. Qual è l'incertezza associata al tasso di conteggio misurato? Una seconda misura nelle stesse condizioni dà luogo a 70 conteggi in un tempo di due minuti. Le due misure sono statisticamente compatibili? Se sì, qual è la migliore stima del tasso di conteggio osservato e la sua incertezza, tenendo conto di entrambe le misure?
28. Un fascio di ioni di $^{12}\text{C}^{++}$ con velocità iniziale nulla, accelerato da una differenza di potenziale $V = 25\text{V}$, penetra in una regione in cui è presente un

campo magnetico \mathbf{B} , diretto normalmente al vettore velocità del fascio incidente. Il raggio di curvatura della traiettoria che le particelle descrivono è di 100 mm. Se ora si utilizza un fascio di ioni di $^{32}\text{S}^{--}$, nelle stesse condizioni, quale sarà il suo raggio di curvatura e la sua velocità? (Si usi il valore $m = 1.65 \cdot 10^{-27}\text{kg}$ per l'unità di massa atomica).

29. Un elettrone che all'istante $t_0 = 0$ si trova nell'origine di un sistema cartesiano ortogonale e si muove nel verso positivo dell'asse x con velocità $v_x = 2.5 \cdot 10^{-7}\text{m/s}$, è sottoposto ad un campo elettrico $E_z = 200\text{V/m}$ diretto come il versore $-\mathbf{k}$. Calcolare l'energia cinetica dell'elettrone all'istante $t = 5 \cdot 10^{-8}\text{s}$.
30. Dato un elettrone in uno spazio tridimensionale descritto dalla funzione d'onda

$$\Psi = \frac{1}{4\pi}(e^{i\phi} \sin \theta + \cos \theta)g(r) \quad (4)$$

con

$$\int_0^\infty |g(r)|^2 r^2 dr = 1 \quad (5)$$

e θ, ϕ gli angoli azimutali e polari.

- (a) Quali sono i possibili valori della componente del momento angolare L_z ?
 (b) Qual è la probabilità di ottenere tali valori?
 (c) Qual è il valore di aspettazione di L_z ?

(Sugg.: ricordare che $Y_{10} = (3/4\pi)^{1/2} \cos \theta$, $Y_{1,\pm 1} = \pm(3/8\pi)^{1/2} \sin \theta e^{i\phi}$)

31. Una particella di carica q si trova in un potenziale armonico e sotto l'azione di un campo elettrico uniforme E :

$$H = p_x^2/2m + 1/2Kx^2 - qEx \quad (6)$$

- (a) Determinare i livelli energetici del sistema e discutere brevemente come le funzioni d'onda del sistema sono legate a quelle di un oscillatore armonico.
 (b) $\langle p_x \rangle$ dipende dal tempo (motivare la risposta)?
32. Un rivelatore cilindrico di area 10cm^2 , con un'efficienza di rivelazione del 100%, posto ad una distanza $d_1 = 30\text{cm}$ da una sorgente radioattiva puntiforme, fornisce un numero di conteggi $N_1 = 7400$ in un minuto. Se si allontana la sorgente ad una distanza $d_2 = 2d_1$, vengono misurati $N_2 = 2000$ conteggi in un minuto. Valutare l'attività della sorgente e la frequenza dei conteggi dovuti al fondo.

33. In un esperimento di conteggi radioattivi governato dalla distribuzione di Poisson vengono effettuate diverse misure del numero di conteggi in intervalli di un minuto, ottenendo un valore medio pari a 0.4 conteggi/minuto. Su 100 misure da un minuto ripetute nelle stesse condizioni, qual è il numero atteso di misure che potrebbero dare 3 conteggi? Se una delle 100 misure desse un valore di 8 conteggi, quali considerazioni fareste?

Costante di Planck $h = 6.626 \times 10^{-34}$ Js, $\hbar =$
Costante di Boltzmann $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K
Massa del protone $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg